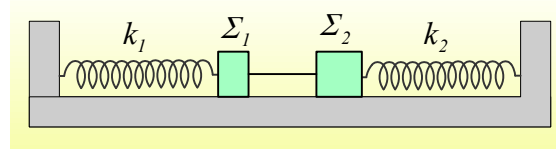


Δύο σώματα και ένα σύστημα ταλαντώνονται

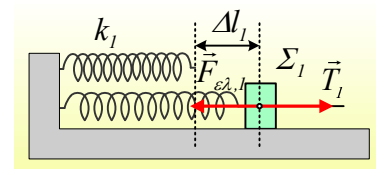
Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο ιδανικών οριζοντίων ελατηρίων με σταθερές $k_1=150\text{N/m}$ και $k_2=250\text{N/m}$, ενώ συνδέονται με αβαρές μη ελαστικό νήμα, όπως στο σχήμα. Στη θέση αυτή το ελατήριο σταθεράς k_1 έχει επιμήκυνση $\Delta l_1=0,4\text{m}$.



- i) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος που συνδέει τα δύο σώματα, καθώς και η παραμόρφωση του δεύτερου ελατηρίου σταθεράς k_2 .
- ii) Εκτρέπουμε το σύστημα προς τα δεξιά κατά $d=0,2\text{m}$ και το αφήνουμε να κινηθεί, τη χρονική στιγμή $t=0$. Θεωρώντας ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, σαν ήταν ένα σώμα Σ μάζας $M=4\text{kg}$, να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα εκτελέσει αατ, για την οποία να βρείτε πλάτος και περίοδο ταλάντωσης.
- iii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, να δώσετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, για το σώμα Σ .
- iv) Να βρεθεί η αλγεβρική τιμή της δύναμης T_1 που το νήμα ασκεί στο σώμα Σ_1 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από την θέση ισορροπίας του και σε συνάρτηση με το χρόνο. Στη συνέχεια να παρασταθούν γραφικά οι παραπάνω δύο συναρτήσεις.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 (το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, δεν μας απασχολούν και δεν σχεδιάστηκαν, αφού το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση). Από την ισορροπία του σώματος παίρνουμε:

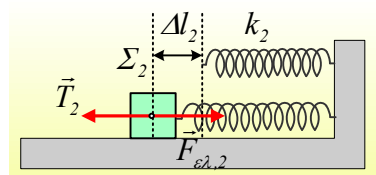


$$\Sigma \vec{F}_1 = 0 \rightarrow T_1 - F_{\epsilon\lambda,1} = 0 \rightarrow T = T_1 = k_1 \cdot \Delta l_1 = 150 \cdot 0,4 \text{ N} = 60 \text{ N}$$

Ενώ ερχόμαστε τώρα στο σώμα Σ_2 , όπου παρόμοια θα έχουμε:

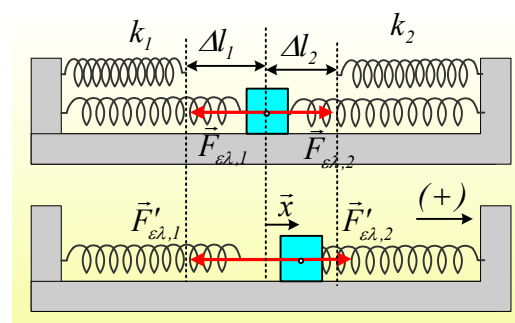
$$\Sigma \vec{F}_2 = 0 \rightarrow F_{\epsilon\lambda,2} - T_2 = 0 \rightarrow T = T_2 = k_2 \cdot \Delta l_2 \rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{T}{k_2} = \frac{60}{250} \text{ m} = 0,24 \text{ m}$$



- ii) Θεωρώντας τα δυο σώματα ως ένα σώμα Σ , σχεδιάζουμε το διπλανό σχήμα, όπου επάνω, το σώμα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και κάτω έχει εκτραπεί κατά x προς τα δεξιά, όπου και αφήνεται να ταλαντωθεί. Για την τυχαία αυτή θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\epsilon\lambda,2} - F_{\epsilon\lambda,1} = k_2 \cdot (\Delta l_2 - x) - k_1 \cdot (\Delta l_1 + x) \rightarrow$$



$$\Sigma F = k_2 \cdot \Delta l_2 - k_2 x - k_1 \cdot \Delta l_1 - k_2 x \xrightarrow{T=k_1 \cdot \Delta l_1 = k_2 \cdot \Delta l_2} \\ \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x = -D \cdot x$$

Συνεπώς το σώμα Σ θα εκτελέσει αατ με πλάτος ίσο με την αρχική απομάκρυνση $A=d=0,2\text{m}$ και περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1+3}{150+250}} \text{ s} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

iii) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/5} \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s}$, ενώ αφού το

σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του από την θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης η απομάκρυνση έχει αρχική φάση $\pi/2$ και η εξίσωση $x=f(t)$ παίρνει τελικά τη μορφή:

$$x = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.}) \quad (1)$$

Ενώ η αντίστοιχη εξίσωση της ταχύτητας είναι:

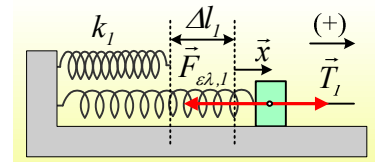
$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

iv) Στα προηγούμενα πήραμε τα δυο σώματα να κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα. Στο σώμα αυτό το ελατήριο k_1 ασκεί την δύναμη $F_{ελ,1}$ για την οποία ισχύει:

$$F_{ελ,1} = -k_1 \cdot (\Delta l_1 + x) = -k_1 \Delta l_1 - k_1 x = -150 \cdot 0,4 - 150 \cdot x = -60 - 150x \quad (\text{S.I.})$$

Αλλά την ίδια κίνηση προφανώς εκτελεί και κάθε σώμα ξεχωριστά. Έτσι αν εστιάσουμε στο σώμα Σ₁, θα έχουμε για τις ασκούμενες δυνάμεις:

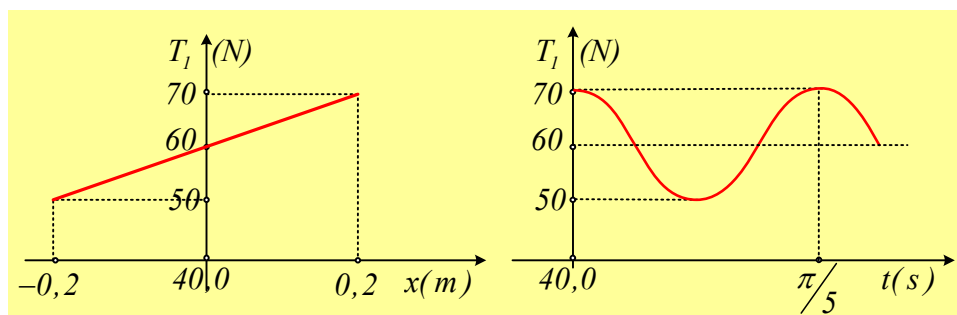
$$\Sigma F_1 = T + F_{ελ,1} \rightarrow m_1 a = T - 60 - 150x \rightarrow -m_1 \omega^2 x = T - 60 - 150x \\ T = 60 + 150x - 100x \rightarrow T = 60 + 50x \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$



Αν τώρα στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε την απομάκρυνση x από την εξίσωση (1) θα πάρουμε:

$$T = 60 + 50x = 60 + 50 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 60 + 10 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (2) και (3).



Σχόλια:

- Αξιίζει να προσέξουμε ότι η αρχή του άξονα της τάσης στο σχήμα, ξεκινά από την τιμή των 40N και

όχι από το μηδέν, για καλύτερη οπτική απόδοση του διαγράμματος.

- Αλλά και να παρατηρήσουμε ότι κατά την παραπάνω ταλάντωση του συστήματος, το νήμα ήταν διαρκώς τεντωμένο, με αποτέλεσμα τα δυο σώματα, να κινούνται μαζί σαν ένα σώμα

dmargaris@gmail.com