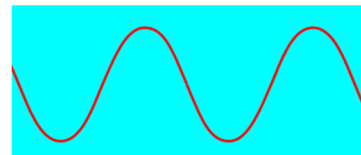


Εξισώσεις πάνω σε ένα κύμα

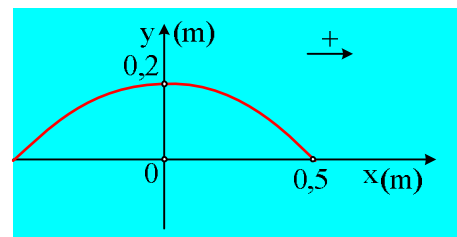
Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται χωρίς απώλειες κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει στην αρχή του άξονα Ο. Το σημείο Ο φτάνει σε θέση πλάτους, για πρώτη φορά, με απομάκρυνση $y=+0,2\text{m}$ τη στιγμή $t_1=0,25\text{s}$, ενώ τη στιγμή αυτή το κύμα φτάνει σε σημείο Β, στη θέση $x_1=0,5\text{m}$.



- i) Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος, καθώς και η ταχύτητα του κύματος.
- ii) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t_2=2,75\text{s}$.
- iv) Να παρασταθεί γραφικά η ταχύτητα του σημείου Β, σε συνάρτηση με το χρόνο από 0- t_2 .
- v) Να δοθεί το στιγμιότυπο του κύματος για μια περιοχή του μέσου με $0 \leq x \leq 4\text{m}$, τη στιγμή t_2 .

Απάντηση:

- i) Αν για $t=0$ το κύμα φτάνει στη θέση $x=0$ και τη στιγμή $t_1=0,25\text{s}$ στη θέση $x_1=0,5\text{m}$, το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, οπότε η μορφή του μέσου τη στιγμή t_1 θα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Αλλά τότε το πλάτος του κύματος είναι $A=0,2\text{m}$, ενώ το χρονικό διάστημα για να μεταβεί το σημείο Ο, από τη θέση ισορροπίας του σε θέση πλάτους, είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της περιόδου. Συνεπώς $T=4t_1=1\text{s}$.



Εξάλλου τη στιγμή t_1 το κύμα φτάνει στο σημείο Β στη θέση $x_1=0,5\text{m}$, συνεπώς η απόσταση αυτή είναι ίση με το $\frac{1}{4} \lambda$, οπότε $\lambda=4x_1=2\text{m}$. Ενώ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{0,5\text{m}}{0,25\text{s}} = 2\text{m/s}$$

$$(\text{Εναλλακτικά } v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\text{m}}{1\text{s}} = 2\text{m/s})$$

- ii) Με βάση τις προηγούμενες τιμές και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σημείο Ο στο οποίο φτάνει το κύμα αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση, η εξίσωση του κύματος έχει τη γνωστή από την θεωρία μορφή:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \quad (S.I.)$$

- iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $x=x_1$ παίρνουμε την απομάκρυνση του σημείου Β:

$$y_B = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{0,5}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu \left(2\pi t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (S.I.) \quad \mu \epsilon \quad t \geq 0,25\text{s}$$

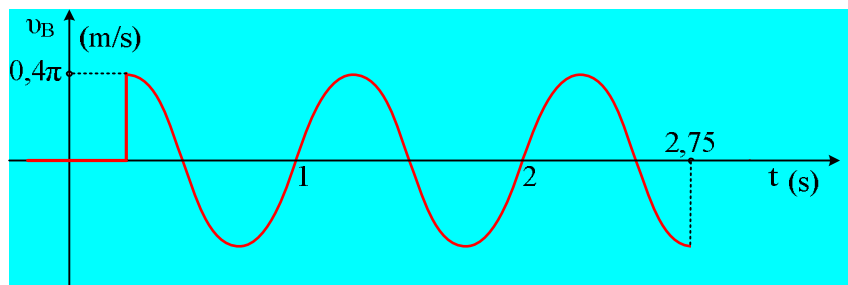
Συνεπώς τη στιγμή t_2 θα έχουμε για **το σημείο Β**:

$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$v_2 = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot 2,75 - \frac{\pi}{2}\right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi) = -0,4\pi \text{ m/s}$$

$$a_2 = -A\omega^2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -0,2 \cdot 4\pi^2 \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 2,75 - \frac{\pi}{2}\right) = -8 \cdot \eta\mu(5\pi) = 0$$

iv) Λαμβάνοντα υπόψη ότι το σημείο Β άρχισε να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1 , τότε η γραφική παράσταση της σχέσης (1) θα έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος, μέχρι τη στιγμή $t=t_2=2,75\text{s}$:



v) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t=t_2=2,75\text{s}$ παίρνουμε:

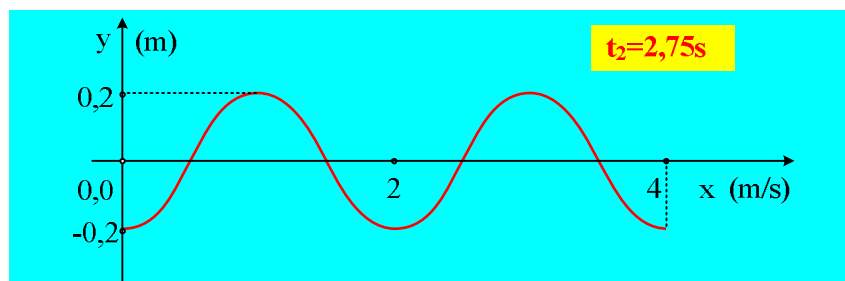
$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,75 - \frac{x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu \left(5,5\pi - 2\pi \frac{x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu \left(4\pi + \frac{3\pi}{2} - \pi x\right) = -0,2 \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (S.I.) \quad (2)$$

Μέχρι ποια θέση ισχύει η σχέση (2); Ισοδύναμα μέχρι ποιο σημείο έχει διαδοθεί το κύμα τη στιγμή t_2 ; Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow d_{\max} = x_2 = vt_2 = 2 \cdot 2,75\text{m} = 5,5\text{m}$$

Οπότε στην περιοχή που μας ζητήθηκε $0 \leq x \leq 4\text{m}$, έχουμε διάδοση του κύματος, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2), έχει τη μορφή:



dmargaris@gmail.com