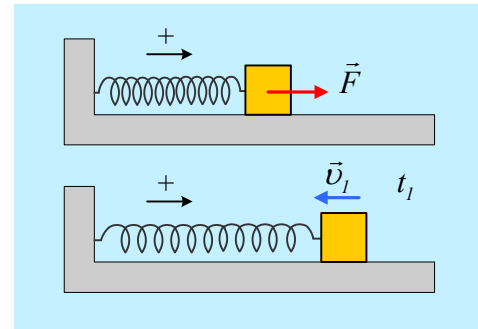


Μια μόνο στιγμή σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση

Ένα σώμα μάζας 2kg ταλαντώνεται στο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,5\cdot\eta\mu(4t)$ (μονάδες στο S.I.) με την επίδραση μιας περιοδικής δύναμης F , ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_a=-0,5v$ (S.I.). Σε μια στιγμή t_1 , το σώμα έχει ταχύτητα $v_1=-1,2\text{m/s}$, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική. Για τη στιγμή αυτή t_1 , ζητούνται:



- Η απομάκρυνση και η επιτάχυνση του σώματος.
- Οι (αλγεβρικές) τιμές των οριζοντίων δυνάμεων που ασκούνται σώμα (δεν μας απασχολούν για την κίνηση αυτή, βάρος και κάθετη αντίδραση του επιπέδου).
- Οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας του σώματος.
- Η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στο σώμα.

Απάντηση:

- i) Αν η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:

$$x=0,5\cdot\eta\mu(4t) \text{ (S.I.)}, \quad (1)$$

τότε η εξίσωση της ταχύτητας θα έχει τη μορφή $v=v_{\max}\sigma\upsilon\nu(4t)$ (S.I.), από όπου παίρνουμε:

$$v=v_{\max}\sigma\upsilon\nu(4t) \rightarrow \sigma\upsilon\nu(4t)=\frac{v_1}{\omega A}=\frac{-1,2}{4\cdot 0,5}=-0,6$$

$$\text{Αλλά } \eta\mu^2(4t)+\sigma\upsilon\nu^2(4t)=1 \rightarrow \eta\mu(4t)=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2(4t)}=\pm\sqrt{1-0,6^2}=\pm 0,8$$

Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$x_1=A\eta\mu(4t)=0,5\cdot 0,8\text{m}=0,4\text{m} \quad \text{ή}$$

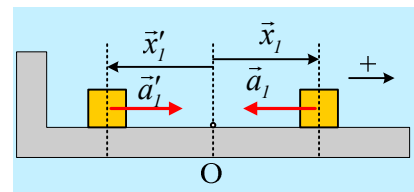
$$x'_1=A\eta\mu(4t)=0,5\cdot(-0,8)=-0,4\text{m}$$

Αντίστοιχα για την επιτάχυνση του σώματος, θα έχουμε:

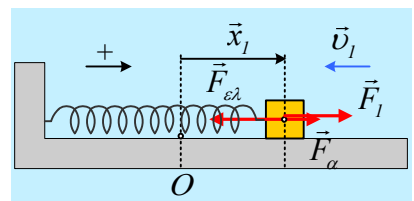
$$\alpha_1=-\omega^2 x_1=-4^2\cdot 0,4\text{m/s}^2=-6,4\text{m/s}^2 \quad \text{ή}$$

$$\alpha'_1=-\omega^2 x'_1=-4^2\cdot(-0,4)\text{m/s}^2=+6,4\text{m/s}^2$$

Στο σχήμα φαίνονται οι δύο θέσεις και οι επιταχύνσεις του σώματος στις θέσεις αυτές.



- ii) Η θέση ισορροπίας του σώματος είναι και θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (θέση O), οπότε για τις ασκούμενες δυνάμεις στο σώμα τη στιγμή t_1 , έχουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με την απομάκρυνση, όπως βρήκαμε παραπάνω:



- α) για $x=+0,4\text{m}$, οι οριζόντιες δυνάμεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Για τις δυνάμεις αυτές έχουμε:

$$F_a = -bv_l = -0,5(-1,2)N = +0,6N$$

$$F_{ελ} = -kx_l = -100 \cdot 0,4N = -40N$$

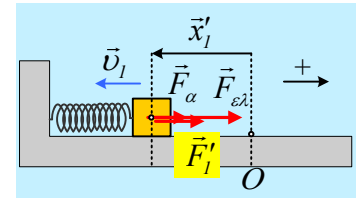
οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \rightarrow F + F_a + F_{ελ} = ma \rightarrow \\ F_l &= ma - F_a - F_{ελ} = 2 \cdot (-6,4)N - 0,6N - (-40)N = 26,6N\end{aligned}$$

β) για $x=-0,4m$, έχουμε αντίστοιχα το διπλανό σχήμα:

$$F_a = -bv_l = -0,5(-1,2)N = +0,6N$$

$$F_{ελ} = -kx'_l = -100 \cdot (-0,4)N = +40N$$



οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \rightarrow F + F_a + F_{ελ} = ma \rightarrow \\ F'_l &= ma - F_a - F_{ελ} = 2 \cdot 6,4N - 0,6N - 40N = -27,8N\end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο στην αλγεβρική τιμή της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}'_l$ σημαίνει ότι η κατεύθυνσή της είναι προς αντίθετη από την κατεύθυνση που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.

iii) Για τους ζητούμενους ρυθμούς, έχουμε ξανά δύο περιπτώσεις:

α) Στη θέση $x=+0,4m$:

$$\frac{dK_l}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = \Sigma F \cdot v_l = ma_l \cdot v_l = 2 \cdot (-6,4) \cdot (-1,2)J/s = 15,36J/s$$

$$\frac{dU_l}{dt} = -\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -\frac{|F_{ελ}| \cdot |dx| \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = -F_{ελ} \cdot v_l = -(-40) \cdot (-1,2)J/s = -48J/s$$

β) Στη θέση $x=-0,4m$, όμοια θα έχουμε:

$$\frac{dK'_l}{dt} = \frac{dW'_{ολ}}{dt} = ma'_l \cdot v_l = 2 \cdot (+6,4) \cdot (-1,2)J/s = -15,36J/s$$

$$\frac{dU'_l}{dt} = -\frac{dW'_{F'_{ελ}}}{dt} = -F'_{ελ} \cdot v_l = -40 \cdot (-1,2)J/s = +48J/s$$

iv) Αλλά και στους υπολογισμούς ισχύος έχουμε πάλι δύο περιπτώσεις, ενώ γενικά $P=F \cdot v$:

α) Στη θέση $x=+0,4m$:

$$P_{F_a} = F_a \cdot v_l = 0,6 \cdot (-1,2)W = -0,72W$$

$$P_{F_{ελ}} = F_{ελ} \cdot v_l = -40 \cdot (-1,2)W = +48W$$

$$P_{F_l} = F_l \cdot v_l = 26,6 \cdot (-1,2)W = -31,92W$$

α) Στη θέση $x=-0,4m$:

$$P_{F_a} = F_a \cdot v_l = 0,6 \cdot (-1,2)W = -0,72W$$

$$P_{F_{ελ}} = F_{ελ} \cdot v_l = 40 \cdot (-1,2)W = -48W$$

$$P_{F_l} = F_l \cdot v_l = -27,8 \cdot (-1,2)W = +33,36W$$

Σχόλιο:

Ας δούμε τι μας λένε τα παραπάνω αποτελέσματα, όσον αφορά τη θέση $x=+0,4m$, για τις ενεργειακές μετατροπές.

Το ελατήριο προσφέρει ενέργεια στο σώμα με ρυθμό $48J/s$ και αυτό γίνεται εις βάρος της δυναμικής του ενέργειας (και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης) η οποία μειώνεται κατά $48J/s$. Τι γίνεται η ενέργεια αυτή; Εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης ενέργεια με ρυθμό $0,72J/s$, αφαιρείται από το σώμα και μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια. Η εξωτερική δύναμη αφαιρεί επίσης ενέργεια από το σώμα, ενέργεια που μεταφέρεται στον διεγέρτη, με ρυθμό $31,92J/s$. Αν από την ενέργεια που προσφέρεται αφαιρέσουμε την ενέργεια που αφαιρείται θα βρούμε:

$$48J/s - 0,72J/s - 31,92J/s = 15,36J/s$$

Ενέργεια που παραμένει στο σώμα, με την μορφή της αύξησης της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Αντίστοιχο «ισολογισμό» μπορούμε να κάνουμε για την θέση $x=-0,4m$; Μπορείτε να δοκιμάσετε;

dmargaris@gmail.com