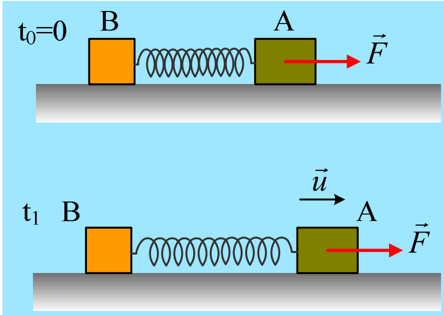
Ένα σύστημα σωμάτων κινείται



Δύο σώματα Α και Β με μάζες m_1=2kg και m_2=1kg αντίστοιχα, ηρεμούν σε ένα οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Σε μια στιγμή t_0=0, ασκούμε στο σώμα Α μια σταθερή οριζόντια δύναμη F, με μέτρο F_1=32,5Ν, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά.

i) Να υπολογισθεί ο αρχικός ($t=0^+$) ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος.

ii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 και ενώ το Α σώμα έχει μετατοπισθεί κατά x=0,2m, έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου u=2m/s, ενώ το σώμα Β μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.

α) Να υπολογισθεί η σταθερά k του ελατηρίου.

β) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε μέσω του έργου της δύναμης στο σύστημα, μέχρι τη στιγμή t_1; Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια αυτή; Να υπολογίσετε την ενέργεια κάθε μορφής.

iii) Μόλις αρχίσει η ολίσθηση του Β σώματος μειώνουμε το μέτρο της δύναμης σε F_2=15Ν, οπότε μια επόμενη στιγμή t_2, το σώμα Α έχει ταχύτητα $υ_1$=0,8m/s. Για τη στιγμή αυτή:

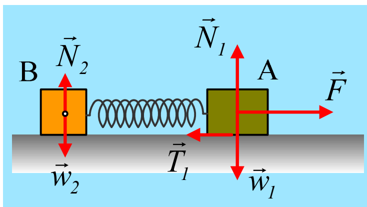
α) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων (+του ιδανικού ελατηρίου).

β) Να βρεθεί η ολική ορμή το συστήματος.

γ) Ποια η ταχύτητα του σώματος Β;

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ το μέτρο της οριακής στατικής τριβής είναι ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης. Υπενθυμίζεται επίσης ο νόμος του Hooke για το ελατήριο F=k·Δl.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο Α σώμα, μόλις ασκηθεί η δύναμη F, ενώ το ελατήριο έχει «ακόμη» το φυσικό του μήκος με αποτέλεσμα το σώμα Β να μην τείνει να κινηθεί, οπότε δεν ασκείται πάνω του δύναμη τριβής. Για το Α σώμα θα έχουμε:

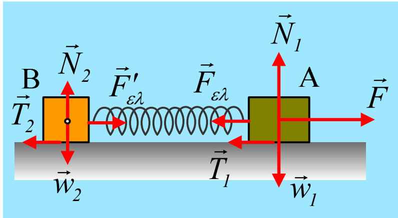
$$\Sigma F_y = 0 \to N_1 = m_1 g \to T_1 = \mu N = \mu m_1 g = 0,5 \cdot 2 \cdot 10N = 10N$$

Αλλά τότε για τους ζητούμενους ρυθμούς μεταβολής θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \Sigma\vec{F}_1 \to \frac{dp_1}{dt} = F - T_1 = (32,5 - 10)kgm/s^2 = 22,5kgm/s^2.$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma\vec{F}_2 = 0$$

ii) Τη στιγμή t_1 που το σώμα Β ξεκινά να κινείται (οριακά υ=0), το ελατήριο έχει επιμήκυνση x, με αποτέλεσμα στα σώματα να ασκούνται οι δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα, για τα μέτρα των οποίων έχουμε:



$$\Sigma F_{yB} = 0 \to N_2 = m_2 g \to$$
$$T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g = 0,5 \cdot 1 \cdot 10N = 5N$$

α) Αλλά αν το Β σώμα είναι έτοιμο να ξεκινήσει, η ασκούμενη τριβή είναι οριακή, ίση με την τριβή ολίσθησης T_2=5N, ενώ από την ισορροπία του σώματος θα έχουμε:

$$\Sigma F_{B,x} = 0 \to F_{\varepsilon\lambda} - T_2 = 0 \to F_{\varepsilon\lambda} = F'_{\varepsilon\lambda} = kx = T_2 \to$$
$$k = \frac{T_2}{x} = \frac{5N}{0,2m} = 25N/m$$

β) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο Α σώμα μέσω της δύναμης F, μέχρι τη στιγμή t_1, ίση με το έργο της δύναμης, είναι:

$$W_F = F \cdot x = 32,5 \cdot 0,2J = 6,5J$$

Ένα μέρος της ενέργειας αυτής μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, λόγω τριβής:

$$Q_\theta = |W_T| = |-T_1 \cdot x| = T_1 \cdot x = 10 \cdot 0,2J = 2J$$

Ένα άλλο μέρος εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας:

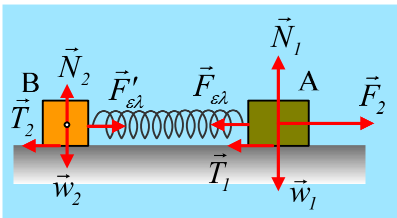
$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 u^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 J = 4J$$

Από τα 6,5J, έχουμε βρει τα 2J+4J=6J, μας λείπουν 0,5J. Αυτά δεν μπορεί παρά να τα έχει πάρει το ελατήριο! Πράγματι αν εφαρμόσουμε για το σώμα Α το Θ.Μ.Κ.Ε. θα πάρουμε:

$$K_1 - K_0 = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T + W_F \xrightarrow{K_0 = W_{w_1} = W_{N_1} = 0}$$
$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = K_1 - W_T - W_F = 4J + 2J - 6,5J = -0,5J$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το ελατήριο αφαίρεσε ενέργεια 0,5J από το σώμα Α. Αυτή την ενέργεια το ελατήριο δεν την έδωσε κάπου, αφού το Β σώμα παραμένει ακίνητο, άρα την έχει το ελατήριο. Αυτή την ενέργεια την ονομάζουμε **δυναμική ενέργεια το ελατηρίου**, λόγω ελαστικής παραμόρφωσης. Δηλαδή έχουμε $U_{\varepsilon\lambda} = 0,5J$.

iii) Μόλις κινηθεί και το σώμα Β, θα έχουμε την ίδια εικόνα, όσον αφορά τις δυνάμεις, με πριν. Αλλά τότε για το σύστημα (σώμα Α+ σώμα Β +ιδανικό ελατήριο) οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν μηδενική συνισταμένη, αφού πέρα από το αυτονόητο για τις κατακόρυφες δυνάμεις, στην οριζόντια διεύθυνση θα έχουμε:



$$\Sigma F_x = F_2 - T_1 - T_2 = 15N - 10N - 5N = 0 \quad (1)$$

Έχουμε δηλαδή ένα μονωμένο σύστημα.

α) Σε ένα μονωμένο σύστημα η ορμή του παραμένει σταθερή, συνεπώς $\dfrac{d\vec{p}_{ολ}}{dt}=0$.

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα αναλυτικά, μελετώντας τα δύο σώμα, αφού το ιδανικό ελατήριο είναι μηδενικής μάζας και ορμής:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\Sigma\vec{F}_1 \rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_2+\vec{F}_{ελ}+\vec{T}_1 \rightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\Sigma\vec{F}_2 \rightarrow \frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}'_{ελ}+\vec{T}_2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, θα πάρουμε:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_2+\vec{F}_{ελ}+\vec{T}_1+\vec{F}'_{ελ}+\vec{T}_2 \rightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_2+\vec{T}_1+\vec{T}_2 \xrightarrow{(1)} \frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt}=0$$

β) Αφού η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, τότε κάθε στιγμή θα είναι ίση με την ορμή του σώματος Α τη στιγμή t_1:

$$\vec{p}_{ολ,2}=\vec{p}_{ολ,1} \rightarrow p_{ολ,2}=m_1u=2\cdot 2kgm/s=4kgm/s$$

γ) Η παραπάνω ορμή, ίση με την ορμή των δύο σωμάτων γράφεται:

$$\vec{p}_{ολ,2}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow p_{ολ,2}=m_1υ_1+m_2υ_2 \rightarrow$$

$$υ_2=\frac{p_{ολ,2}-m_1υ_1}{m_2}=\frac{4-2\cdot 0,8}{1}m/s=2,4m/s$$

Σχόλιο:

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, το οποίο έχει παραμόρφωση Δl, δίνεται από την εξίσωση:

$$U=\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$$

Παραπάνω δεχτήκαμε ότι η παραπάνω εξίσωση δεν είναι γνωστή, αφού θέλαμε να καταλήξουμε στην ανάγκη της εισαγωγής της, στην ενεργειακή μελέτη μας. Για το λόγο αυτό δόθηκε ως δεδομένο η ταχύτητα του σώματος Α, τη στιγμή t_1… πράγμα που δεν θα ήταν απαραίτητο αν γνωρίζαμε τη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης.

dmargaris@gmail.com