

### Ποια ροπή επιταχύνει την τροχαλία;

Πώς στρέφεται μια τροχαλία με τη βοήθεια ενός νήματος;

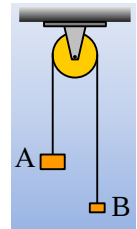
Είναι η τάση του νήματος, η ροπή της οποίας, προκαλεί την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας;

Παίζουν κάποιο ρόλο οι τριβές μεταξύ νήματος και τροχαλίας και αν ναι, ποιον;

Ας κάνουμε μια διερεύνηση της κατάστασης που επικρατεί, μέσω δύο παραδειγμάτων.

#### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Δίνεται η διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου στα άκρα ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος, έχουμε δέσει δυο σώματα Α και Β με μάζες  $m_1=2\text{kg}$  και  $m_2=1\text{kg}$ . Το νήμα περνά από τροχαλία μάζας  $M=4\text{kg}$  και ακτίνας  $R=20\text{cm}$ . Το σύστημα ηρεμεί, αφού εμείς συγκρατούμε το σώμα Β στη θέση του. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Β, το οποίο αρχίζει να ανέρχεται, χωρίς να γλιστρά το νήμα στο αυλάκι της τροχαλίας.

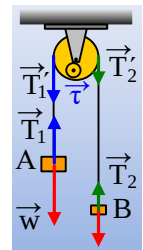


Να βρεθεί η ροπή που επιταχύνει την τροχαλία.

Δίνεται για την τροχαλία  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

Η λύση που δίνουμε (και καλά κάνουμε...), είναι να σχεδιάζουμε τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου  $T_1$  η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Α,  $T_1'$  η αντίστοιχη τάση του αριστερού τμήματος του νήματος που ασκείται στην τροχαλία και αφού το νήμα είναι αβαρές  $T_1=T_1'$ , ενώ με την ίδια συλλογιστική, το δεξιό τμήμα του νήματος ασκεί δυνάμεις  $T_2$  και  $T_2'$  στο σώμα Β και στην τροχαλία αντίστοιχα.



Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για τα τρία σώματα παίρνουμε:

$$\text{Για το σώμα Α: } \Sigma F = m_1 \cdot a_1 \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \cdot a_1 \quad (1)$$

$$\text{Για το σώμα Β: } \Sigma F = m_2 \cdot a_2 \rightarrow T_2 - m_2 g = m_2 \cdot a_2 \quad (2)$$

$$\text{Για την τροχαλία: } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 \cdot R' - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Αλλά αφού το νήμα έχει σταθερό μήκος και δεν γλιστράει στην τροχαλία  $a_1=a_2=\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R=a$  και το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) δίνει:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \rightarrow$$

$$\text{Και με αντικατάσταση } a = \frac{(2-1) \cdot 10}{2+1+\frac{4}{2}} \text{ m/s}^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Συνεπώς η ροπή που επιταχύνει την τροχαλία, είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δύο τάσεων του νήματος:

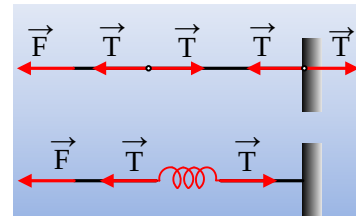
$$\Sigma \tau = T_1 \cdot R' - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} MR \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 2,5 \text{ N}\cdot\text{m} = 0,5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Με διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής της τροχαλίας και φορά προς τα έξω (στο σχήμα).

Είναι έτσι η πραγματικότητα; Ασκοούνται στην τροχαλία οι δύο παραπάνω τάσεις;

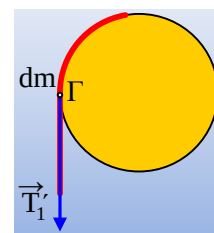
Για να απαντήσουμε, θα πρέπει να αναρωτηθούμε τι ονομάζουμε τάση του νήματος. Τάση του νήματος έχει επικρατήσει να ονομάζουμε τη δύναμη που το νήμα ασκεί σε ένα σώμα. Έτσι εξετάζοντας το σώμα B, βλέπουμε να επιταχύνεται προς τα πάνω, δεχόμενο από το νήμα την δύναμη  $T_2$ , την οποία ονομάζουμε τάση του νήματος.

Στην πραγματικότητα όταν ασκούμε μια δύναμη τραβώντας ένα νήμα, η τάση του νήματος είναι η δύναμη που ασκεί κάθε τμήμα του νήματος στο διπλανό του και μπορούμε να την μετρήσουμε, αν κόψουμε το νήμα σε ένα σημείο παρεμβάλλοντας ένα ελατήριο, όπως στο σχήμα. Αλλά με βάση το πάνω σχήμα, ο τοίχος ασκεί στο νήμα μια δύναμη προς τα δεξιά και αφού το



νήμα ισορροπεί  $\Sigma F=0$ , συνεπώς η δύναμη αυτή έχει το ίδιο μέτρο με την δύναμη  $F$ . Έτσι λέμε απλά ότι ασκώντας μια δύναμη  $F$  στο ένα άκρο του νήματος, η δύναμη μεταφέρεται μέσω του νήματος, με αποτέλεσμα να ασκείται και μια ίση δύναμη στον τοίχο από το νήμα, η λεγόμενη τάση του νήματος.

Ας έρθουμε τώρα στην τροχαλία και στο σημείο επαφής  $\Gamma$  του νήματος με αυτήν. Πού ασκείται η τάση  $T_1'$ ; Προφανώς όχι στην τροχαλία. Αν πάρουμε μια στοιχειώδη μάζα  $dm$  του νήματος που βρίσκεται σε επαφή με την τροχαλία, τότε το ευθύγραμμο αριστερό μέρος του νήματος, του ασκεί την τάση του νήματος  $T_1'$ , όπως στο σχήμα. Η τάση του νήματος  $T_1'$  ασκείται σε υλικό σημείο του νήματος και όχι στην τροχαλία!!!



Αλλά τότε ποια ροπή επιταχύνει στροφικά την τροχαλία;

### **Η ροπή της στατικής τριβής μεταξύ νήματος και τροχαλίας.**

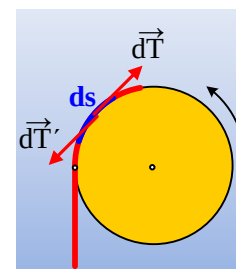
Πράγματι αν εστιάσουμε σε ένα στοιχειώδες τμήμα  $ds$  του νήματος που βρίσκεται σε επαφή με την τροχαλία, τότε το τμήμα αυτό τείνει να κινηθεί, ως προς την τροχαλία, συνεπώς στο τμήμα  $ds$  του σχοινιού αναπτύσσεται δύναμη στατικής τριβής  $dT$ , ενώ  $dT'$ , η αντίδρασή της η οποία ασκείται στην τροχαλία, όπως στο διπλανό σχήμα.

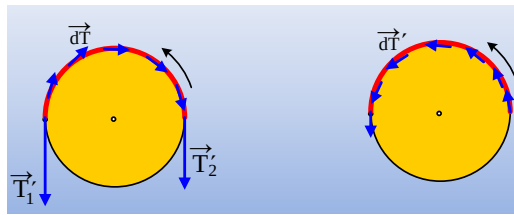
Η δύναμη αυτή έχει αντίστοιχα ροπή, ως προς τον άξονα περιστροφής  $dt=dT' \cdot R$ .

Αλλά τότε η συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία από το νήμα θα είναι:

$$\tau_{\text{ολ}} = \int dT'R = R \int dT' = T_s \cdot R$$

όπου  $\int dT' = T_s$  η στατική τριβή, μέτρου ίσου με το άθροισμα των μέτρων όλων αυτών των στοιχειωδών στατικών τριβών που ασκούνται στην τροχαλία.





Οι στοιχειώδεις δυνάμεις  
στατικής τριβής στο νήμα.

Οι στοιχειώδεις δυνάμεις  
στατικής τριβής στη τροχαλία.

Αλλά αν πάρουμε όλο το μήκος του νήματος που έρχεται σε επαφή με την τροχαλία και εφαρμόσουμε το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα γι' αυτό, θα έχουμε:

$$T_1' - T_s - T_2' = m \cdot a \quad (*)$$

Όπου  $m$  η μάζα του τμήματος αυτού. Αλλά επειδή το νήμα θεωρείται αβαρές  $m \rightarrow 0$ , συνεπώς

$$T_1' - T_s - T_2' = 0 \rightarrow$$

$$T_s = T_1' - T_2' \rightarrow$$

$$\tau_{ολ} = \int dT' R = R \int dT' = R \cdot T_s = (T_1' - T_2') \cdot R = T_1' R - T_2' R$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η ροπή που υπολογίζουμε θεωρώντας ότι στην τροχαλία ασκούνται οι ροπές των δυο τάσεων  $T_1'$  και  $T_2'$ , είναι ίση με την πραγματική ροπή που δέχεται, που δεν είναι άλλη από τη ροπή της στατικής τριβής.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Ας επιστρέψουμε στο παραπάνω πρόβλημα, εξετάζοντας από πιο κοντά το ερώτημα:

Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ νήματος και τροχαλίας, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση του νήματος.

### Απάντηση:

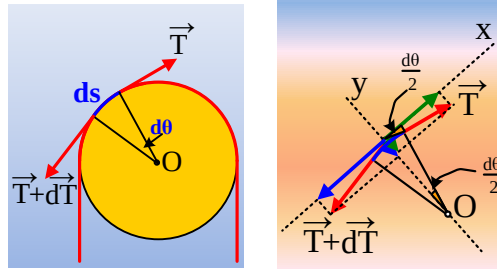
Αποδείξαμε παραπάνω ότι:

$$T_s = T_1' - T_2' = T_1 - T_2 \quad (4)$$

Το ερώτημα θα μπορούσε να τεθεί και έτσι:

### Πόση είναι η τάση του νήματος;

Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα  $ds$  του σχοινιού, το οποίο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $d\theta$ , το οποίο δέχεται δύναμη  $T$  (τάση του νήματος) από το δεξιό τμήμα του νήματος και δύναμη  $T+dt$ , από το αριστερό του, όπως στο πρώτο σχήμα. Αν αναλύσουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, τον άξονα  $x$ , εφαπτόμενο στο  $ds$  και τον άξονα  $y$ , κάθετο στο  $ds$  θα πάρουμε την εικόνα του δεύτερου σχήματος, οπότε:



$$\Sigma F_x = (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = dT \cdot \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$\Sigma F_y = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} + T \cos \frac{d\theta}{2} = 2T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{Αλλά } \frac{d\theta}{2} \rightarrow 0 \text{ συνεπώς } \sin \frac{d\theta}{2} \rightarrow 0 \text{ ενώ } \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1,$$

$$\text{αλλά και } dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} \approx dT \cdot 1 \rightarrow dT$$

και οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\Sigma F_x = dT \text{ ενώ}$$

$$\Sigma F_y = 2T \cdot \frac{d\theta}{2} = T \cdot d\theta$$

Όμως στον άξονα y η στοιχειώδης μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση οπότε:

$$\Sigma F_y - N = dm \frac{v^2}{R}$$

Αλλά επειδή  $dm \rightarrow 0$ , έχουμε  $\Sigma F_y - N = 0 \rightarrow N = \Sigma F_y$

Για να μην ολισθαίνει το νήμα θα πρέπει  $T_s \leq T_{op}$  και ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, είναι αυτός για τον οποίο:

$$T_s = T_{op} \text{ ή } dT = \mu_s N \rightarrow dT = \mu_s T \cdot d\theta \rightarrow$$

$$\frac{dT}{T} = \mu_s \cdot d\theta \rightarrow \int \frac{dT}{T} = \mu_s \cdot \int d\theta \rightarrow$$

$$\ln T = \mu_s \cdot \theta \rightarrow T = C \cdot e^{\mu_s \cdot \theta}$$

Αλλά όταν  $\theta=0$  (το νήμα στην δεξιά θέση επαφής),  $T=T_2$  και η προηγούμενη εξίσωση δίνει:

$$T_2 = C \cdot e^{\mu_s \cdot 0} \rightarrow C = T_2 \text{ οπότε}$$

$$T = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \theta} \quad (5)$$

Σχέση που παρέχει την τάση στο ένα άκρο του νήματος, σε συνάρτηση με την γωνία  $\theta$  που έχει τυλιχθεί το νήμα και την (μικρότερη) τάση στο άλλο άκρο.

Αλλά η γωνία που αντιστοιχεί στο μέρος του σχοινιού που είναι σε επαφή με την τροχαλία είναι  $\theta=\pi$  και η εξίσωση μας δίνει:

$$T_1 = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \pi}$$

και η (1) γίνεται:

$$T_s = T_1 - T_2 = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \pi} - T_2 = T_2 (e^{\mu_s \cdot \pi} - 1) \quad (6)$$

Όμως  $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} M \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 \text{N} = 2,5 \text{N}$  ενώ

$T_2 - m_2 g = m_2 \cdot \alpha \rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 \cdot \alpha = 1 \cdot 10 \text{N} + 1 \cdot 2,5 \text{N} = 12,5 \text{N}$ , οπότε από την (3) θα έχουμε:

$$T_s = T_2 (e^{\mu_s \cdot \pi} - 1) \rightarrow$$

$$e^{\mu_s \cdot \pi} = \frac{T_s + T_2}{T_2} \rightarrow$$

$$\ln e^{\mu_s \cdot \pi} = \ln \frac{T_s + T_2}{T_2} \rightarrow$$

$$\mu_s = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \frac{T_s + T_2}{T_2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2,5 + 12,5}{12,5} \approx 0,06$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ένας ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής είναι αρκετός ώστε να μην γλιστράει το νήμα στο αυλάκι της τροχαλίας.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι αντιστρόφως ανάλογος με την γωνία  $\theta$  (για ορισμένη τάση  $T_2$ ), πράγμα αναμενόμενο και από την εξίσωση (2), αλλά προφανώς εξαρτάται και από την τάση του νήματος.

Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση του ίδιου συστήματος, με τα ίδια κινηματικά χαρακτηριστικά.

Ας πάρουμε τη διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το Α σώμα μπορεί τώρα να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και το αριστερό τμήμα του νήματος είναι οριζόντιο. Ποιος θα είναι τώρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής, μεταξύ σχοινιού και κυλίνδρου;

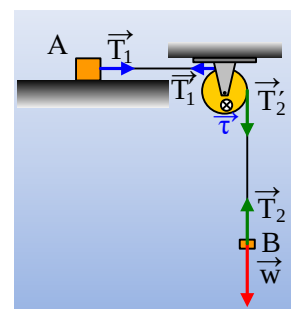
Οι μαθηματικές εξισώσεις είναι (τελικά) ίδιες, οπότε μπορούμε να βρούμε:

$\alpha = 2,5 \text{m/s}^2$ ,  $T_1 = 5 \text{N}$ ,  $T_2 = 7,5 \text{N}$ ,  $T_s = 2,5 \text{N}$  και:

$$T_s = T_1 \left( e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \rightarrow$$

$$e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{T_s + T_1}{T_1} \rightarrow$$

$$\ln e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} = \ln \frac{T_s + T_1}{T_1} \rightarrow$$

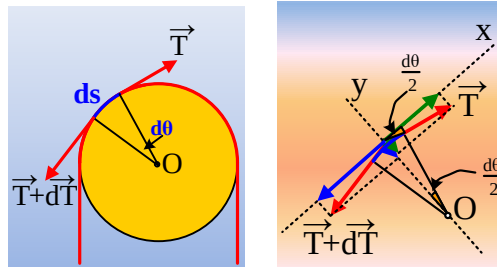


$$\mu_s = \frac{2}{\pi} \cdot \ln \frac{T_s + T_1}{T_1} = \frac{2}{3,14} \cdot \ln \frac{2,5+5}{5} \approx 0,26$$

Βλέπουμε δηλαδή μια σημαντική αύξηση στην τιμή του  $\mu_s$ , που οφείλεται κυρίως στην μικρότερη τάση του νήματος. Αν η τάση παρέμενε ίδια, (πράγμα που μπορεί να συμβεί επιλέγοντας κατάλληλες τιμές μαζών,  $m_1=5\text{kg}$  και  $m_2=1,2\text{kg}$ ), θα είχαμε απλά διπλασιασμό της τιμής του συντελεστή οριακής στατικής τριβής.

(\*)

Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα  $ds$  του σχοινιού, το οποίο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $d\theta$ , το οποίο δέχεται δύναμη  $T$  (τάση του νήματος) από το δεξιό τμήμα του νήματος και δύναμη  $T+dT$ , από το αριστερό του, όπως στο πρώτο σχήμα. Αν αναλύσουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, τον άξονα  $x$ , εφαπτόμενο στο  $ds$  και τον άξονα  $y$ , κάθετο στο  $ds$  θα πάρουμε την εικόνα του δεύτερου σχήματος, οπότε:



$$\Sigma F_{Tx} = (T + dT) \sin \nu \frac{d\theta}{2} - T \sin \nu \frac{d\theta}{2} = dT \cdot \sin \nu \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{Αλλά } \frac{d\theta}{2} \rightarrow 0 \text{ συνεπώς } \sin \nu \frac{d\theta}{2} \rightarrow 1 \text{ οπότε:}$$

$$\Sigma F_{Tx} = dT$$

Έτσι αν μείνουμε στην εφαπτομενική διεύθυνση, θα έχουμε από τον 2<sup>ο</sup> νόμο:

$$\Sigma F_x = dm \cdot a$$

Για κάθε στοιχειώδη μάζα  $dm$ , του στοιχειώδους τόξου  $ds$ , με διεύθυνση αυτήν της εφαπτομένης.

Έτσι για τα μέτρα θα έχουμε:

$$dT - dT_s = dm \cdot a$$

όπου  $dT_s$  η στοιχειώδης στατική τριβή που δέχεται το αντίστοιχο τόξο.

$$\int_{T_2'}^{T_1'} dT - \int_0^m dT_s = \int_0^m dm \cdot a \rightarrow [T]_{T_2'}^{T_1'} - T_s = m \cdot a \text{ όπου, } T_s \text{ το μέτρο της συνολικής στατικής τριβής, } a \text{ το μέτρο}$$

της κοινής εφαπτομενικής επιτάχυνσης κάθε στοιχειώδους μάζας του νήματος και  $m$  η μάζα του νήματος που αντιστοιχεί σε ημιπερίφεια. Άρα:

$$T_1' - T_2' - T_s = m \cdot a$$

