

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1.1 Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε και να απλοποιήσετε τις τιμές

$$f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(\sqrt{2}), f(\alpha^2)$$

(I) $f(x) = \frac{1}{x}$

(II) $f(x) = x^2 + 5$

(III) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$

(IV) $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$

1.2 Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2$$

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f(1), f(0), g(1), h(-1)$

β. $f(x^2), f(x^2) + 1, f(x + 1), f(2x) + f(x^2)$

γ. $g(x^2), g(x^2 + 1), g(x) + g(-x), g(x + 1)$

δ. $h(x + 1), h(x^2), h(2x) + h(x^2), h(x^2) + 1$

1.3 Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$f(\alpha + h) - f(\alpha)$$

(I) $f(x) = 3x - 2$

(II) $f(x) = x^2$

(III) $f(x) = x^2 + 2x$

(IV) $f(x) = \frac{1}{x}$

1.4 Για τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ισχύει $g(a) = 5$.

(I) $g(x) = 3x - 4$

(II) $g(x) = \frac{1}{2x-1}$

(III) $g(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

(IV) $g(x) = x^3 - 3$

1.5 Έστω η συνάρτηση f , με

$$f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

να δείξετε ότι:

$$f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

1.6 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$f(1) = 1, \quad f(2x) = 4f(x) + 6, \quad f(x+2) = f(x) + 12x + 12$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(6)$.

1.7 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.

Να δείξετε ότι:

(I) $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$

(II) $f(-x) \cdot f(x) = 1$

(III) Να δείξετε ότι ο αριθμός 1 δεν μπορεί να είναι τιμή της συνάρτησης f .

1.8 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x + 3$, $x > 0$

(I) Να βρείτε τις τιμές:

$$f(1), \quad f(e), \quad f(e^2), \quad f\left(\frac{1}{e}\right)$$

(II) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = e^{1004}$, να δείξετε ότι:

$$f(\alpha) - f(\beta) = 2008$$

1.9 Αν $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$, να δείξετε ότι:

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$$

1.10 Έστω η συνάρτηση $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ αν $a \neq \beta \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{g(\alpha) - g(\beta)}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta}$$

1.11 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + x + 1$

(I) Να δείξετε ότι:

$$f(x) \geq \frac{3}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(II) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2^x) = 7$$

1.12 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

1.13 Η θερμοκρασία ενός ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη αντιπυρετικού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\theta(t) = \frac{6t}{3+t^2} + 36,5$$

(I) Να βρείτε τη θερμοκρασία του ασθενούς όταν $t = 1$.

(II) Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία θα είναι 38°C ;

1.14 Μια λίμνη μολύνεται από διαρροή τοξικού υγρού. Η ποσότητα σε λίτρα που έχει διαρρεύσει στη λίμνη μετά πάροδο t ωρών είναι:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{5-t}, & \text{αν } 0 \leq t \leq 4 \\ 10t - 32, & \text{αν } t > 4 \end{cases}$$

Η διαρροή διήρκεσε 10 ώρες.

- I) Να υπολογίσετε πόσα λίτρα τοξικού υγρού διοχετεύθηκαν στη λίμνη.
- II) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή t_0 υπήρχαν στη λίμνη 8 λίτρα τοξικού υγρού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1.15 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ | 2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ |
| 3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ | 4. $f(x) = \sqrt{2-x}$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ | 6. $f(x) = \sqrt{x^2-1} + 2$ |
| 7. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ | 8. $f(x) = \ln(1-2x)$ |
| 9. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ | 10. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ |
| 11. $f(x) = e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$ | 12. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ |
| 13. $f(x) = \sqrt{1- x }$ | 14. $f(x) = \frac{x+1}{2-\eta\mu x}$ |
| 15. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ | 16. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ |
| 17. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$ | 18. $f(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-2}$ |
| 19. $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} + \ln x$ | 20. $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$ |

1.16 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2 + 2x - 3$$

Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

- | | | |
|----------------|--------------------|----------------------|
| 1. $h = f + g$ | 2. $h = f \cdot g$ | 3. $h = \frac{f}{g}$ |
| 4. $h = \ln g$ | 5. $h = \sqrt{g}$ | 6. $h = e^g$ |

1.17 Έστω η συνάρτηση f :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - ax + 1}, \quad a \in \mathbb{R}$$

να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

1.18 Έστω η συνάρτηση f :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{\alpha}x + \beta} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{\beta}x + \alpha}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

1.19 Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f :

$$f(x) = \ln(ax^2 + x + \alpha)$$

να έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

1.20 Δίνεται η συνάρτηση $g: g(x) = x^2 - 1$

α. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = 0$;

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x)$ είναι θετική;

γ. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x}{g(x)}$.

ii. Το πεδίο ορισμού B της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{g(x)}$.

iii. Το πεδίο ορισμού Γ της συνάρτησης $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{g(x)}}$.

1.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$.

(I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

(II) Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\frac{f(\alpha^2)}{|\alpha|} = |\alpha| + 1$$

1.22 Έστω $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

(II) Αν $x > 0$, να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$

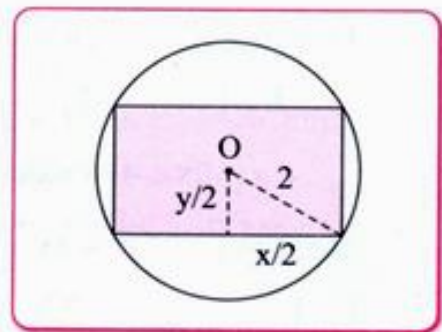
(III) Αν $\ln \alpha + \ln \beta = 0$, να δείξετε ότι:

$$f(\alpha) = f(\beta)$$

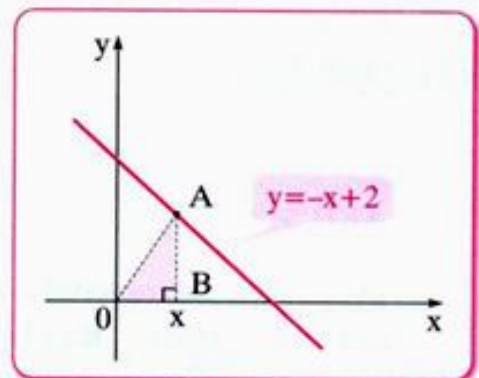
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1.23 Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου χρειάζεται για την περίφραξη του συρματοπλέγμα μήκους 400 m. Αν η μια πλευρά του είναι x τότε να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του x . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής;

1.24 Ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 2 όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να εκφράσετε το εμβαδόν E του ορθογωνίου σαν συνάρτηση της μιας πλευράς του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.



1.25 Να εκφράσετε το εμβαδόν (OAB) του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.



1.26 Με πλέγμα περιφραξης μήκους 100 m περιφράσσουμε δύο οικόπεδα από τα οποία το ένα έχει σχήμα κύκλου και το άλλο έχει σχήμα ορθογωνίου με τη μία πλευρά του διπλάσια από την άλλη. Να εκφράσετε το άθροισμα των εμβαδών των δύο οικοπέδων σε συνάρτηση με τη μικρότερη πλευρά x του ορθογωνίου οικοπέδου.

1.27 Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών x, y είναι ίσο με 10.

α. Να εκφράσετε σαν συνάρτηση τον x :

(I) Το γινόμενο τους

(II) Το άθροισμα των τετραγώνων τους.

β. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων.

1.28 Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ βρίσκεται επάνω στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 2x + 3y = 6$. Από το M φέρνουμε την MA κάθετη στον άξονα Ox και την MB κάθετη στον άξονα Oy . Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $OAMB$ ως συνάρτηση:

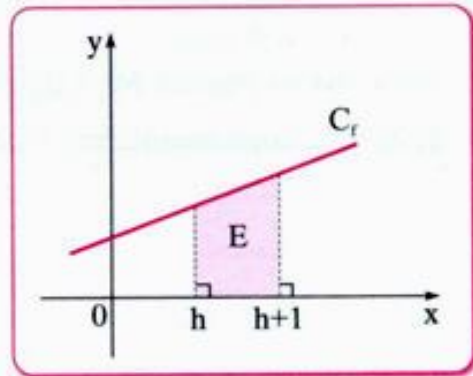
I) του α

II) του β

Στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμίας από τις παραπάνω συναρτήσεις.

1.29 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + 3$, του διπλανού σχήματος.

Να εκφράσετε το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου, ως συνάρτηση του h .



1.30 Θεωρούμε την ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = 2x + 1$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A .

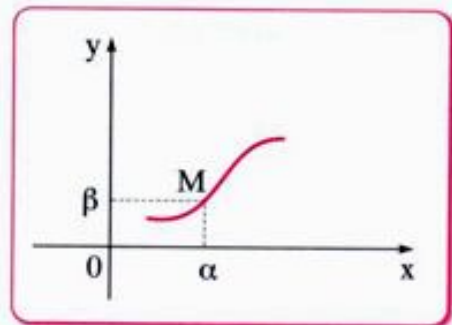
(I) Σε τυχαίο σημείο B του θετικού ημιάξονα φέρνουμε κάθετη προς τον $x'x$ η οποία τέμνει την (ε) στο M . Να εκφράσετε το εμβαδόν του σχήματος $AOBM$ σε συνάρτηση με την τετμημένη x του B .

(II) Ένα σημείο $N(x, y)$ κινείται πάνω στην (ε) . Να εκφράσετε την απόσταση του σημείου N από το σημείο $\Gamma(1, 2)$ σε συνάρτηση με την τετμημένη x του σημείου N .

Είναι σημαντικό να μπορεί κάποιος να «διαβάζει» την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης διότι από αυτήν μπορεί να αντλήσει σχεδόν όλες τις πληροφορίες που τον ενδιαφέρουν την συνάρτηση, όπως πεδίο ορισμού - μονοτονία - ακρότατα αν οι τιμές της είναι θετικές - αρνητικές κ.τ.λ.

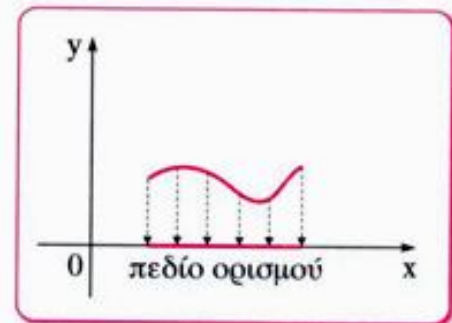
- **Σημείο γραφικής παράστασης**

Λέμε ότι το σημείο $M(a, \beta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της $f \Leftrightarrow f(a) = \beta$.



- **Πεδίο ορισμού**

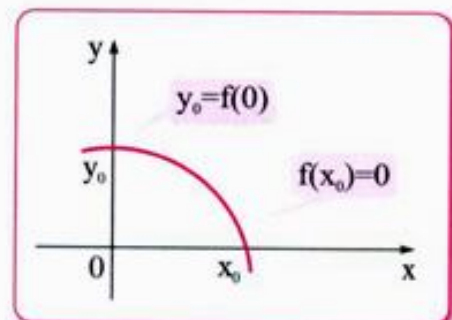
Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης από την γραφική της παράσταση προβάλλουμε τα σημεία της καμπύλης στον άξονα $x'x$.



- **Σημεία τομής με τους άξονες**

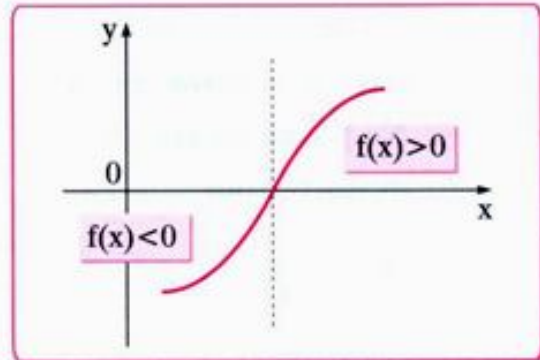
Το σημείο τομής y_0 της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τον άξονα $y'y$ είναι $y_0 = f(0)$ (αρκεί βέβαια το 0 να ανήκει στο Π.Ο.)

Ενώ για να βρούμε το σημείο ή τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.



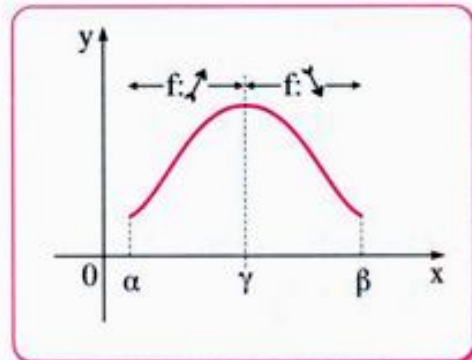
- **Θετικές - αρνητικές τιμές**

Στο διάστημα όπου η C_f βρίσκεται επάνω από τον άξονα $x'x$, οι τιμές της είναι θετικές ενώ για το διάστημα όπου είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ οι τιμές της είναι αρνητικές



- **Μονοτονία**

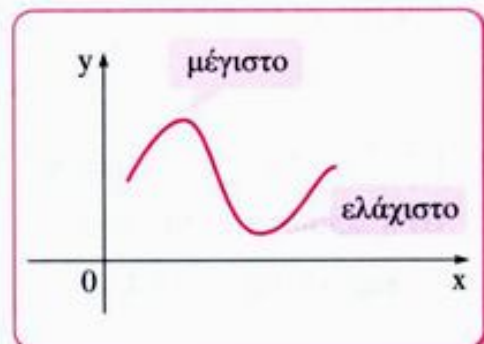
Στο διάστημα όπου η καμπύλη ανεβαίνει η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου κατεβαίνει.



x	α	γ	β
f	↗		↘

- **Ακρότατα**

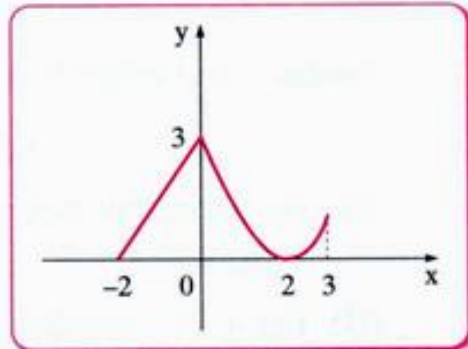
Μέγιστο έχουμε στο υψηλότερο σημείο της καμπύλης ενώ ελάχιστο έχουμε στο χαμηλότερο.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

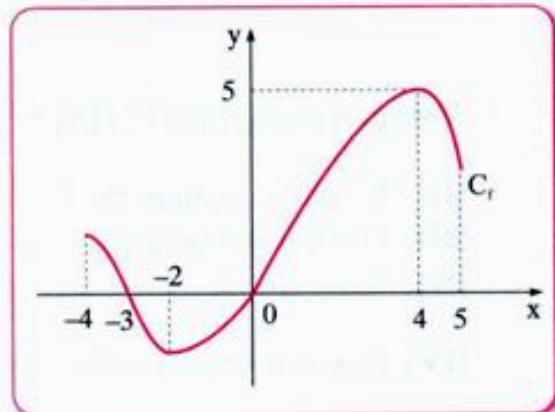
1.31 Για τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

- α.** Να βρείτε:
- i) Το πεδίο ορισμού της
 - ii) Τα διαστήματα μονοτονίας της
- β.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
- i) $2^{f(x)} = 1$
 - ii) $f(x) = \pi$



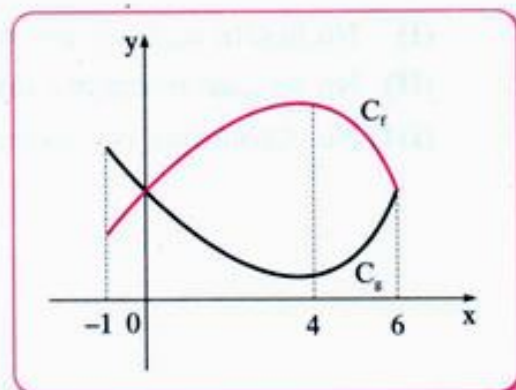
1.32 Για τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

- (I) Το πεδίο ορισμού της
- (II) Τα διαστήματα μονοτονίας της
- (III) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (IV) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.
- (V) Τις λύσεις της εξίσωσης $2^{f(x)} = 64$.



1.33 Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g .

- α.** Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g
- β.** Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης



$$f(x) = g(x)$$

- γ. Ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$
 δ. Ποια είναι τα διαστήματα μονοτονίας των f, g ;

1.34 Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = x^3 + ae^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (I) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.
 (II) Για $a = 1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
 (III) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(3x - 2)^3 - x^3 < e^x - e^{3x-2}$$

1.35 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Να βρείτε:

- (I) Το πεδίο ορισμού της f .
 (II) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 (III) Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 (IV) Τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας με εξίσωση: $y = \frac{3}{5}$.

1.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + x + \beta}{x + 3}$. Η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$,

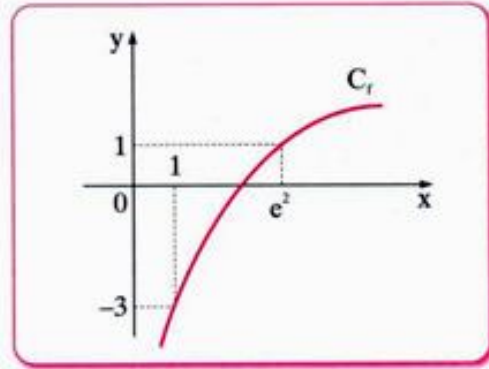
$y'y$ στα σημεία $A(2, -0)$, $B(0, -2)$ αντίστοιχα.

- (I) Να βρείτε τις τιμές των α, β .
 (II) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 (III) Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

1.37 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = a \ln x + \beta$$

- (I) Να βρείτε τις τιμές των a , β .
- (II) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (III) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .



1.38 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln(x - 2)}$$

- (I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (II) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σημείο $M(\lambda, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .
- (III) Να αποδείξετε ότι:

$$f(2 + e^{1-x^2}) = x$$

1.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x + 5)$

- (I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- (II) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (III) Να βρείτε τα πραγματικά x ώστε η C_f να βρίσκεται επάνω από τον άξονα $x'x$.

