ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1)

$|w - 5\bar{w}| = 12$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z - w| \le 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ell n x-1$, $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle \ell n x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell n x - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ell n x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,\ x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε **ή μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεώρημα στη σελ. 253 του Ο.Ε.Δ.Β. στα Μαθηματικά Θεωρητικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης.

Α2 Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα** $\left[\alpha,\beta\right]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β), και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

Α3 Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f.**

Α4 α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Έστω $z=x+yi$. Τότε έχουμε:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow |x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4$$

$$\Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2+|(x+1)+yi|^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}^{\,2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}^{\,2}=4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow x^2-\cancel{2x}+1+y^2+x^2+\cancel{2x}+1+y^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

Επομένως η εικόνα $M(x,y)$ του μιγαδικού $z=x+yi$ επαληθεύει την εξίσωση (1) η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

B2 Εφόσον ισχύει $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2 \Rightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2$$

$$\Rightarrow z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 2 \Rightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 = 2$$

$$\Rightarrow 1^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + 1^2 = 2 \Rightarrow -z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = 0} \qquad (2)$$

Προκειμένου να βρούμε το $|z_1 + z_2|$ θα υπολογίσουμε το $|z_1 + z_2|^2$. Έτσι έχουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 =$$

$$1^2 + 0 + 1^2 = 2 \quad (\text{από } (2) \quad z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = 0)$$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

B3 (α) Έστω $w = x + yi$. Τότε έχουμε:

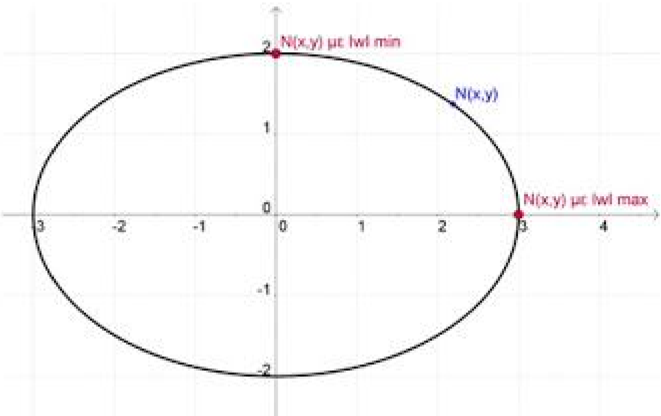
$$|w - 5\overline{w}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5x + 5yi| = 12$$

$$\Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(-4x)^2 + (6y)^2} = 12 \Leftrightarrow (-4x)^2 + (6y)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad (3)$$

Επομένως η εικόνα $N(x,y)$ του μιγαδικού $w = x + yi$ επαληθεύει την εξίσωση (3) η οποία είναι εξίσωση έλλειψης με $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

(β) Το $|w|$ εκφράζει την απόσταση του $N(x,y)$ από την αρχή των αξόνων. Αφού το $N(x,y)$ ανήκει στην έλλειψη (3), προφανώς η απόσταση αυτή γίνεται μέγιστη όταν το $N(x,y)$ βρεθεί σ' ένα από τα άκρα της μεγάλης διαμέτρου της έλλειψης η οποία έχει μήκος $2\alpha = 2\cdot 3 = 6$. Άρα η απόσταση από το κέντρο θα είναι $\alpha = 3$. Άρα $|w|_{max} = 3$.



Αντίστοιχα η απόσταση αυτή γίνεται ελάχιστη όταν το $N(x,y)$ βρεθεί σ' ένα από τα άκρα της μικρής διαμέτρου της έλλειψης η οποία έχει μήκος $2\beta = 2\cdot 2 = 4$. Άρα η απόσταση από το κέντρο θα είναι $\beta=2$. Άρα $|w|_{min} = 2$.

Β4 Ισχύει $|z-w| = |w-z| = |w+(-z)|$. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\big||w|-|-z|\big| \le |w+(-z)| \le |w|+|-z|$$

$$\Leftrightarrow \big||w|-|z|\big| \le |w-z)| \le |w|+|z| \qquad (\text{ισχύει: } |-z|=|z|)$$

$$\Leftrightarrow |w|-|z| \le |z-w| \le |w|+|z| \qquad (\text{από το Β3 ερώτημα}$$

$$\Leftrightarrow 2\text{ - }1 \le |w|-|z| \le |z-w| \le |w|+|z| \le 3+1 \qquad \text{ισχύει: } 2\le|w|\le 3 \text{ άρα}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le |w|-|z| \le |z-w| \le |w|+|z| \le 4 \qquad |w|>|z| \text{ άρα } |w|-|z|>0)$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = (x-1)\cdot \ln x - 1\ ,\ \ x>0$$

Γ1 Άρα $f'(x) = \ln x + (x-1)\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + \dfrac{x-1}{x}, \quad x>0.$

Επειδή δεν μπορούμε να μελετήσουμε το μηδενισμό και τα πρόσημα της $f'(x)$, θα την μελετήσουμε ως συνάρτηση. Άρα έχουμε: $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-(x-1)}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2} > 0,$ διότι $x>0$. Άρα $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε:

Η $f'(x)$ ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	

Επειδή όμως είναι $f'(1)=\ln 1+\frac{1-1}{1}=0$, προφανώς η $x=1$ είναι η μοναδική της ρίζα. Επίσης ισχύει:

για $x>1$

$\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)$ (η f' είναι γν. αύξουσα)

$\Leftrightarrow f'(x)>0$

για $0<x<1$

$\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)$ (η f' είναι γν. αύξουσα)

$\Leftrightarrow f'(x)<0$

Επομένως έχουμε: η $f(x)$ είναι φν. φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\circ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Το $f(1)=(1-1)\ln 1-1=-1$ είναι ολικό ελάχιστο της $f(x)$, ενώ ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\big((x-1)\ln x-1\big)=-1\cdot(-\infty)-1=(+\infty)-1=+\infty$$

και $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\big((x-1)\ln x-1\big)=(+\infty)\cdot(+\infty)-1=(+\infty)-1=+\infty$$

Άρα $f(A)=[-1,+\infty)$.

Γ2 Για την εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ ισχύει:

$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow f(x)=2012 \qquad (1)$

Όμως το σύνολο τιμών της $f(x)$ στο διάστημα $(0,1]$, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών είναι το

$[-1,+\infty)$. Άρα το 2012 είναι ενδιάμεση τιμή αυτού. Για την f(x) ως συνεχή συνάρτηση, ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2012$. Επιπλέον η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, όπως προκύπτει από τον προηγούμενο πίνακα, άρα είναι «1-1» στο διάστημα αυτό. Άρα δεν υπάρχει $x_0 \neq x_1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_1) = 2012$. Άρα μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) στο διάστημα $(0,1]$, είναι η $x = x_1$.

Ομοίως και στο διάστημα $[1,+\infty)$ η f(x) είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1», με σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το $[-1,+\infty)$. Άρα υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 2012$, το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της ιδιότητας του «1-1» στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1 και x_2.

Γ3 Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)+f(x)=2012$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2)$. Όμως ισχύει:

$$f'(x)+f(x)=2012 \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x)+e^x \cdot f(x)=2012e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot f'(x)+e^x \cdot f(x)-2012e^x=0 \qquad (2)$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Έστω συνάρτηση $G(x)=e^x \cdot f(x)-2012e^x$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτή είναι συνεχής στο διάστημα αυτό επειδή προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη σ' αυτό με $G'(x)=e^x \cdot f'(x)+e^x \cdot f(x)-2012e^x$

Επίσης $G(x_1)=e^{x_1}f(x_1)-2012e^{x_1}=e^{x_1}\cdot 2012-2012e^{x_1}=0$ και $G(x_2)=e^{x_2}f(x_2)-2012e^{x_2}=e^{x_2}\cdot 2012-2012e^{x_2}=0$, δηλ. $G(x_1)=G(x_2)$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $G'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\cdot f(x_0)-2012e^{x_0}=0$.

Γ4 Για την συνάρτηση $g(x)$ ισχύουν:
$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$ όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών της $f(x)$.

Επιπλέον $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)+1>0 \Leftrightarrow f(x)>-1$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών της $f(x)$.

Επομένως

$$E=\int_1^e |g(x)|\,dx=\int_1^e g(x)\,dx=\int_1^e (f(x)+1)\,dx=\int_1^e (x-1)\ln x\,dx$$

$$=\int_1^e\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2-2x+1}{2x}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}-x+\ln|2x|\right]_1^e=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+x-\ln|2x|\right]_1^e$$

$$\left(\frac{(e-1)^2}{2}\cdot 1-\frac{e^2}{4}+e-\ln 2e\right)-\left(0-\frac{1}{4}+1-\ln 2\right)$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{e^2}{4}+e-\cancel{\ln 2}-\ln e+\frac{1}{4}-1+\cancel{\ln 2}$$

$$=\frac{2e^2-\cancel{4e}+2-e^2+\cancel{4e}+1-8}{4}=\frac{e^2-5}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Εφόσον ισχύει $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

έχουμε: $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow \int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0 \qquad (1)$

Έστω $G(x) = \int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$. Για τη συνάρτηση $G(x)$

πρέπει $x^2-x+1 \in A_f$ και $1 \in A_f \Leftrightarrow x^2-x+1>0$ και $1>0$

Τα οποία ισχύουν διότι το τριώνυμο $x^2-x+1>0$ έχει διακρίνουσα αρνητική και επομένως είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θετικό. Άρα το πεδίο ορισμού της G είναι $A_G = \mathbb{R}$. Επίσης σύμφωνα με το (1) η $G(x)$ έχει ολικό ελάχιστο το μηδέν.

Όμως $G(0) = \int_{1}^{1} f(t)dt - \frac{1-1}{e} = 0$. Άρα η $G(x)$ εμφανίζει ακρότατο στο $x=0$. Επειδή αυτό είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της G και η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο $x=0$), με

$G'(x)=f(x^2-x+1)\cdot(2x-1)-\dfrac{1-2x}{e}$, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat ισχύει

$$G'(0)=0 \Leftrightarrow f(1)\cdot(-1)-\frac{1}{e}=0 \Leftrightarrow -f(1)-\frac{1}{e}=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$$

Όμως για την $f(x)$ ισχύει: $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα ως συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$
Με δεδομένο ότι $f(1)<0$ συμπεραίνουμε ότι
$f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επομένως έχουμε:

$$\ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)| \Leftrightarrow \ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot(-f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e \quad (2)$$

Έστω $g(x)=\dfrac{\ln x-x}{f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τότε σύμφωνα με τη (2) ισχύει

$$g(x)=\int_1^x g(t)dt+e \Rightarrow g'(x)=g(x) \Rightarrow g'(x)-g(x)=0$$

$$\Rightarrow e^x g'(x)-e^x g(x)=0 \Rightarrow \frac{e^x g'(x)-e^x g(x)}{e^{2x}}=0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{e^x}\right)'=0$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{e^x}=c \quad (3)$$

Όμως $g(1)=\int_1^1 g(t)dt+e=0+e=e$. Επομένως από το (3)

έχουμε $\frac{g(1)}{e}=c\Leftrightarrow\frac{e}{e}=c\Leftrightarrow 1=c$. Άρα από (3)

συμπεραίνουμε $\frac{g(x)}{e^x}=1\Leftrightarrow g(x)=e^x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα $e^x=\frac{\ln x-x}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x-x}{e^x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η οποία προφανώς είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)e^x-(\ln x-x)e^x}{e^{2x}}$$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Δ2 Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\right)^2 \cdot \left[ημ\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{ημ\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}} = A$$

Όμως $\lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{x\to o^+}\frac{\ln x - x}{e^x} = \frac{-\infty - 0}{e^0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

Θέτω $\frac{1}{f(x)} = u$, άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = 0$ δηλ. όταν $x \to 0^+$ τότε $u \to 0$. Άρα το όριο Α γίνεται:

$$A = \lim_{u\to 0}\frac{ημ u - u}{u^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{συν u - 1}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\frac{συν u - 1}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3 (α) Έχουμε:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x) \;\; για \;\; x > 0$$

$$\Rightarrow F''(x) = f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - \left(\ln x - x\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} > 0$$

διότι $\ln x \le x - 1 \Rightarrow -1 + x - \ln x \ge 0$ και $\frac{1}{x} > 0$

Άρα $\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x > 0$. Επομένως η $F(x)$ είναι κυρτή.

(β) Έχουμε:

$$F(x)+F(3x)>2F(2x)\Leftrightarrow F(3x)-F(2x)>F(2x)-F(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}>\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x} \qquad (x>0) \qquad (4)$$

Για τη συνάρτηση $F(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[2x,3x]$ και $[x,2x]$ διότι είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά, άρα και συνεχής. Επομένως υπάρχει $x_2\in(2x,3x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $F'(x_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$ και υπάρχει $x_1\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $F'(x_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$. Άρα η (4) γίνεται:

$$(4)\Leftrightarrow F'(x_2)>F'(x_1)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}x_2>x_1 \quad \text{που ισχύει.}$$

(*) Η $F'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα διότι στο (α) αποδείχθηκε ότι $F''(x)>0$.

Δ4 Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $F(\beta)+F(3\beta)=2F(x)$ έχει μοναδική ρίζα $\xi \in (\beta, 2\beta)$. Όμως ισχύει:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2F(x) \Leftrightarrow 2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)=0 \qquad (5)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η (5) έχει μοναδική ρίζα $\xi \in (\beta, 2\beta)$. Έστω η συνάρτηση $G(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$ στο διάστημα $[\beta, 2\beta]$. Η $G(x)$ είναι συνεχής επειδή προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$G(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)>0 \qquad (**)$$

και $G(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0 \qquad (***)$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση $G(x)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε $G(\xi)=0$. Δηλαδή

$2F(\xi)-F(\beta)-F(3\beta)=0$. Επειδή όμως $G'(x)=2F'(x)=2f(x)<0$ (**) η $G(x)$ είναι γν. φθίνουσα. Άρα έχει το πολύ μία ρίζα. Άρα η ξ είναι η μοναδική ρίζα της $G(x)$.

(**) Ισχύει $f(x)=\dfrac{\ln x - x}{e^x} \le \dfrac{-1}{e^x} < 0$. Άρα $F'(x)=f(x)<0$.
Άρα η $F(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και αφού $\beta<3\beta$ συμπεραίνουμε ότι $F(\beta)>F(3\beta)$. Άρα $F(\beta)-F(3\beta)>0$.

(***) Στο Δ3 αποδείχθηκε ότι ισχύει $F(x)+F(3x)>2F(2x)$ για κάθε $x>0$. Άρα ισχύει και $F(\beta)+F(3\beta)>2F(2\beta)$, άρα $2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$.