

Μεθοδολογία απόδειξης ανισοτήτων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ.

Προκειμένου να αποδείξουμε μία ανισότητα, μεταφέρουμε όλους τους όρους σ' ένα μέλος και παραγοντοποιούμε. Μετά ελέγχουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα. Σ' αυτό θα μας βοηθήσουν ενδεχομένως οι πιθανές συνθήκες που θα δίνονται.

Πολλές φορές δεν είναι δυνατή η παραγοντοποίηση, αλλά μπορούμε να δημιουργήσουμε αθροίσματα τετραγώνων.

Ακολουθούν παραδείγματα

Απόδειξη ανισότητας χωρίς συνθήκη.

Να δείξετε ότι: $\alpha(2\alpha - 2) - 3\alpha^2 \geq 2\alpha - 2(\alpha^2 + 2)$

$$\alpha(2\alpha - 2) - 3\alpha^2 \geq 2\alpha - 2(\alpha^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 3\alpha^2 \geq 2\alpha - 2\alpha^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 3\alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha^2 + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$$

ΙΣΧΥΕΙ

Απόδειξη ανισότητας με συνθήκη.

Αν ισχύει $\alpha < 1 < \beta$, να δείξετε ότι: $\alpha\beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \beta > 0$

$$\alpha\beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \beta > 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) > 0 \quad \text{κοινός παράγοντας}$$

$$\Leftrightarrow \beta(\overline{\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}) > 0 \quad \text{ομαδοποίηση}$$

$$\Leftrightarrow \beta(\alpha(\beta - 1) - (\beta - 1)) > 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(\beta - 1)(\alpha - 1) > 0$$

ΙΣΧΥΕΙ διότι

$$\beta > 1 > 0$$

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$$

$$\beta > 1 \Leftrightarrow \beta - 1 > 0$$

Απόδειξη ανισότητας με άθροισμα τετραγώνων.

Να αποδείξετε ότι: $4\alpha^2 - 12\alpha + \beta^2 + 4\beta + 13 \geq 0$

$$4\alpha^2 - 12\alpha + \beta^2 + 4\beta + 13 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \beta^2 + 4\beta + 4 \geq 0 \quad \text{Διασπάσαμε το 13 σε 9+4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{4\alpha^2 - 12\alpha + 9} + \overline{\beta^2 + 4\beta + 4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0$$

ΙΣΧΥΕΙ

ΝΑ ΣΗΜΕΙΩΘΕΙ ΟΤΙ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΟΤΕ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟ.

ΕΙΝΑΙ ΔΕ ΙΣΟ ΜΕ ΤΟ ΜΗΔΕΝ, ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΟ ΟΡΟΙ.

ΕΤΣΙ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΜΗΔΕΝ ΟΤΑΝ $\alpha = 3$ και $\beta = -2$