Μεθοδολογίες απόδειξης ταυτοτήτων

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα: Α=Β.
Υπάρχουν τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να εργασθεί κανείς.

- Γράφουμε μόνο το ένα μέλος (εδώ το πρώτο μέρος Α) της ταυτότητας και κάνοντας πράξεις σ' αυτό, με διαδοχικές ισότητες καταλήγουμε στο άλλο μέλος (εδώ το δεύτερο μέρος Β). Σχηματικά φαίνεται η μέθοδος ως εξής: Α=…=…=…=…=Β. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συνήθως όταν μπορούμε να κάνουμε πράξεις μόνο στο ένα μέλος. Ακολουθεί παράδειγμα:

Απόδειξη ταυτότητας $(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$$(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=(2\alpha)^2+2\cdot 2\alpha\cdot\beta+\beta^2-\left[\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot 2\beta+(2\beta)^2\right]=$$
$$=4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2=3\alpha^2-3\beta^2=$$
$$=3\left(\alpha^2-\beta^2\right)=3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

- Γράφουμε μόνο το πρώτο μέρος της ταυτότητας (Α) και κάνοντας πράξεις σ' αυτό, με διαδοχικές ισότητες καταλήγουμε σε αποτέλεσμα (Κ) όπου δεν μπορούμε να συνεχίσουμε τις πράξεις. Κατόπιν γράφουμε μόνο το δεύτερο μέλος (Β) και κάνοντας πράξεις σε αυτό, με διαδοχικές ισότητες καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα (Κ), στο οποίο καταλήξαμε και προηγουμένως. Σχηματικά η μέθοδος φαίνεται ως εξής: Α=…=…=…=…=Κ και ακολούθως Β=…=…=…=Κ. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν μπορούμε να κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη. Ακολουθεί παράδειγμα:

Απόδειξη ταυτότητας $(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$$(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=(2\alpha)^2+2\cdot 2\alpha\cdot\beta+\beta^2-\left[\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot 2\beta+(2\beta)^2\right]=$$
$$=4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2=$$
$$=\widehat{4\alpha^2}+\cancel{4\alpha\beta}+\widehat{\beta^2}-\widehat{\alpha^2}-\cancel{4\alpha\beta}-\widehat{4\beta^2}=3\alpha^2-3\beta^2=\mathrm{K}$$

$$3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3\left(\alpha^2-\beta^2\right)=3\alpha^2-3\beta^2=\mathrm{K}$$

- Γράφουμε όλη την ταυτότητα που έχουμε προς απόδειξη και με ισοδυναμίες, κάνοντας πράξεις στα δύο μέλη, παίρνουμε νέες ισότητες έως ότου καταλήξουμε σε ισότητα που ισχύει. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συνήθως όταν δεν μπορούμε να κάνουμε πράξεις σε κανένα από τα δύο μέλη. Ακολουθεί παράδειγμα:

Απόδειξη ταυτότητας $(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$$(2\alpha+\beta)^2-(\alpha+2\beta)^2=3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha)^2+2\cdot 2\alpha\cdot\beta+\beta^2-\left[\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot 2\beta+(2\beta)^2\right]=3\left(\alpha^2-\beta^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2=3\alpha^2-3\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2+\cancel{4\alpha\beta}+\beta^2-\alpha^2-\cancel{4\alpha\beta}-4\beta^2=3\alpha^2-3\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2-3\beta^2=3\alpha^2-3\beta^2 \qquad \text{ΙΣΧΥΕΙ}$$

Σ' ΟΛΑ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΕ ΤΕΤΟΙΑ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΩΣΤΕ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.