ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 28 (μονάδες 7)
Α2. Ορισμός τοπικού ελαχίστου σχολικό βιβλίο σελίδα 40 (μονάδες 4)
Α3. Ορισμός διαμέσου σχολικό βιβλίο σελίδα 87 (μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}$$

Άρα $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$f: f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x>0$. Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{3}\ln x\frac{1}{3}$.

Άρα $f'(1) = \frac{1}{3}$ και επομένως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$. (μονάδες 10)

Β2.

Εφόσον $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ το $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Άρα επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Rightarrow \frac{1}{3} \le P(A')$.

Επίσης $\{\omega_1\} \subseteq A \Rightarrow P(\omega_1) \le P(A) \Rightarrow \frac{1}{4} \le P(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \le 1 - P(A') \Rightarrow P(A') \le \frac{3}{4}$. (μονάδες 7)

Β3.

- $P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$.
- Ξέρουμε ότι $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow 1 + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow P(\omega_4) = 0$.
- $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $\mathrm{B} = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $\mathrm{B}' = \{\omega_2, \omega_4\}$.

Επομένως $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\omega_1\}$, $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = \{\omega_2\}$, $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{\omega_4\}$, $\mathrm{B} - \mathrm{A} = \{\omega_3\}$
$\mathrm{A}' - \mathrm{B}' = \{\omega_3\}$ και $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \{\omega_4, \omega_3\}$.

Συνεπώς $P\left[(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})\right] = P(\omega_4) + P(\omega_3) = \frac{1}{3}$ και

$P\left[A' - B'\right] = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$. (μονάδες 8)

Γ1.

Η τέταρτη κλάση $[50+3C,...)$ έχει κεντρική τιμή 85.

Τότε $50+3C+\frac{C}{2}=85 \Rightarrow 100+6C+C=170 \Rightarrow 7C=70 \Rightarrow C=10$. (μονάδες 4)

Γ2.

κλάσεις	x_i	f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4
Σύνολο	////////////////	1

Επειδή δ$=75$, $\frac{f_3}{2}+f_4=0,5 \Rightarrow \frac{f_3}{2}+2f_3=0,5 \Rightarrow f_3+4f_3=1 \Rightarrow 5f_3=1 \Rightarrow f_3=0,2$

.

Άρα $f_4=2f_3 \Rightarrow f_4=0,4$.

Ακόμα $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5 \Rightarrow f_1+f_2+\frac{0,2}{2}=0,5 \Rightarrow f_1+f_2=0,4$ (1)

Όμως $\bar{x}=74 \Rightarrow x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4=75 \Rightarrow 55f_1+65f_2=74-15-34 \Rightarrow$

$55f_1+65f_2=25$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει $f_2=0,3$ και $f_1=0,1$ (μονάδες 8)

Γ3.

Αν ν είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε

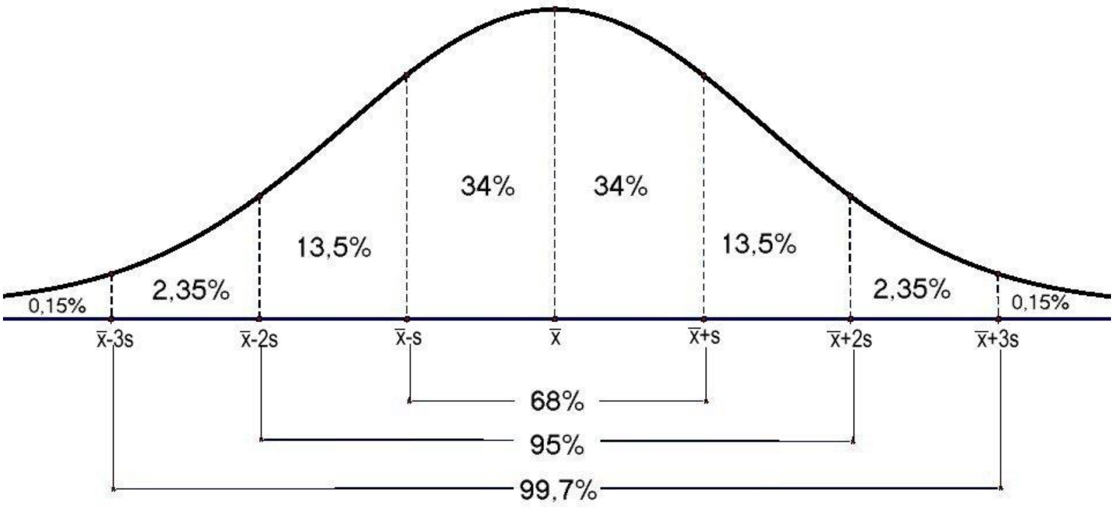
$\nu_1=f_1\cdot\nu=0,1\cdot\nu,\quad \nu_2=f_2\cdot\nu=0,3\cdot\nu,\quad \nu_3=f_3\cdot\nu=0,2\cdot\nu$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\quad \bar{x}'=\frac{55\cdot\nu_1+65\cdot\nu_2+75\cdot\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}=\frac{55\cdot0,1\nu+65\cdot0,3\nu+75\cdot0,2\nu}{0,1\nu+0,3\nu+0,2\nu}=$$

$$=\frac{5,5+19,5+15,0}{0,6}=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$$

(μονάδες 7)

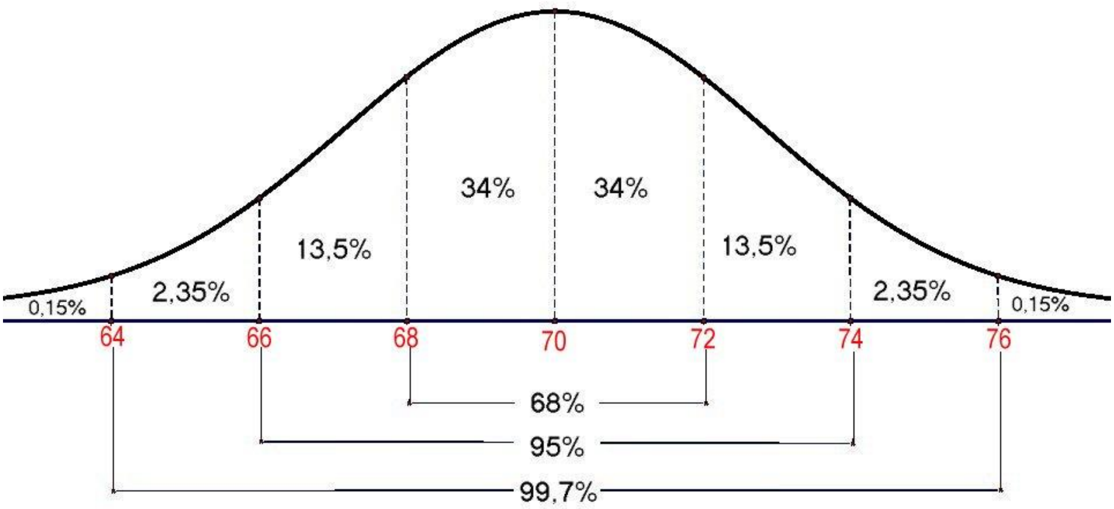
Γ4.



$$\frac{68\%}{2}=34\%,\quad \frac{95\%-68\%}{2}=13,5\%,\quad \frac{99,7-95\%}{2}=2,35\%,\quad \frac{100\%-99,7}{2}=0,15\%$$

$$\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ -\bar{x}+s=-68\end{cases}$$

προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $3s=6\Rightarrow s=2$ και $\bar{x}-2=68\Rightarrow \bar{x}=70$.



Οπότε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}<\frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές. (μονάδες 6)

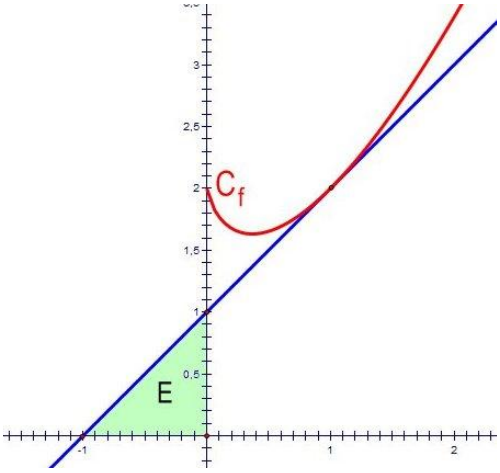
ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $(1, f(1))$ είναι ε: $y=x+\kappa-1$.

Τα σημεία τομής της ε με τους άξονες είναι $A(0,\kappa-1)$ και $B(1-\kappa,0)$.



Άρα $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|\kappa-1|\cdot|1-\kappa|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2=\frac{(\kappa-1)^2}{2}$

$(OAB)<2\Leftrightarrow\frac{(\kappa-1)^2}{2}<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4\Leftrightarrow\kappa^2-2\kappa-3<0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\kappa\in(-1,3)\\ \kappa>1\\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\kappa=2$$

(μονάδες 5)

Δ2α.

Η εφαπτομένη είναι ε: $y=x+1$.

Η μέση τιμή των τεταγμένων είναι $\bar{y}=\bar{x}+1\Leftrightarrow 31=\bar{x}+1\Leftrightarrow\bar{x}=30$

(μονάδες 2)

Δ2β.

$$31=\frac{(x_1+3)+...+(x_{20}+3)+x_{21}+...+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+...+(x_{50}-\lambda)}{50}\Leftrightarrow$$

$$31=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}+\frac{20\cdot3-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=30+\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow$$

$$50=60-15\lambda\Leftrightarrow 15\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$$

(μονάδες 4)

Δ3.

Βρίσκω την μονοτονία της f.

$f(x)=x\ln x+2,\quad x>0$ με $f'(x)=\ln x+1$ με $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στο $\left(\frac{1}{e},e\right)$ η $f \uparrow$ άρα $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$.

Επειδή $f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}>0$.

Άρα σε αύξουσα σειρά οι αριθμοί είναι

$$f'\left(\frac{1}{e}\right),\ f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma),\ f(e)$$

Επομένως, το εύρος είναι $R=f\left(e\right)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2$.

$$\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}\Rightarrow \ln\left(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)=\ln e^{7}\Rightarrow \ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7.$$

Άρα για τη μέση τιμή έχουμε

$$\bar{x}=\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=$$

$$\frac{0+a\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+8+e}{5}=\frac{a\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+8+e}{5}=\frac{7+8+e}{5}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{15+e}{5}.$$ (μονάδες 7)

Δ4.

Για να σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ άξονα, πρέπει

$$f'(t)>0\Leftrightarrow \ln t+1>0\Leftrightarrow t>\frac{1}{e}.$$

Άρα, το $A=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$.

Ισχύει

$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\ln t+2>\ln t+1+1\Leftrightarrow t\ln t>\ln t\Leftrightarrow (t-1)\ln t>0$, ισχύει για $t\in(0,1)$.

Επειδή $0<t<1\Leftrightarrow \ln t<0$

$t<1\Leftrightarrow t-1<0$.

Αφού $t_{30}\notin(0,1)$ έχουμε $B=\{t_1,t_2,...,t_{29}\}$ επομένως :

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(B)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

β) Επειδή $A\bigcap B=\{t_{11},...,t_{29}\}$ έχουμε $P\left(A\bigcap B\right)=\frac{N\left(A\bigcap B\right)}{N\left(\Omega\right)}=\frac{19}{30}$.

(μονάδες 7)