
Έλλειψη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

45. Να βρεθούν οι εστίες της έλλειψης c: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

[Βλέπε άσκηση 1 — Προκύπτει: $E'(-\sqrt{5}, 0)$ και $E(\sqrt{5}, 0)$]

46. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, με κέντρο την αρχή των αξόνων, αν έχει:

i) Εστίες $E'(-4, 0)$ $E(4, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 12.

ii) Μήκη αξόνων 8 και 12 και ο μεγάλος άξονας βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.

iii) Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$, ο μεγάλος άξονας βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει μήκος 20.

iv) Εστιακή απόσταση 6, εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$ και ο μεγάλος άξονας βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

[Βλέπε άσκηση 2 – Προκύπτει: i) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$, ii) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$, iii) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, iv) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$]

47. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία $M\left(-2, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ και $N\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

[Βλέπε άσκηση 7. – Προκύπτει $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$]

48. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων η οποία έχει $\alpha = 2\beta$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, 6)$.

[Προκύπτει $\frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{40} = 1$]

49. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις

$$c: \frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1 \quad \text{και} \quad c': \frac{x^2}{\kappa^2 + \varrho^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 + \varrho^2} = 1$$

έχουν τις ίδιες εστίες.

[Αν $\kappa > \lambda$ οι εστίες των δύο ελλείψεων βρίσκονται στον άξονα $x'x$ ενώ αν $\kappa < \lambda$... Αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι είναι $\gamma = \gamma'$].

★ **50.** Δίνεται η έλλειψη c: $16x^2 + 25y^2 = 400$ και το σημείο $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$. Να δείξετε ότι το M είναι σημείο της έλλειψης και να βρείτε τις εστιακές ακτίνες του M.

[Βλέπε άσκηση 9. – Προκύπτει: $r' = \frac{37}{5}$ και $r = \frac{13}{5}$]

51. Δίνεται η έλλειψη με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{3}$ και εστία $E'(-2, 0)$ και ένα σημείο της $M(2, y_0)$. Να βρεθούν οι αποστάσεις του M από τις εστίες της έλλειψης E' και E δηλαδή οι εστιακές ακτίνες του M.

[Προκύπτει ότι η έλλειψη είναι $c: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$, οπότε είναι $y_0 = \pm \frac{16}{3}$. Άρα ...]

52. Δίνεται η έλλειψη $c: x^2 + 2y^2 = 2$. Να δείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από τις εστίες της και είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: x - y + 7 = 0$, τέμνουν την έλλειψη σε τέσσερα σημεία που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης.

[Προκύπτει ότι, οι ευθείες είναι οι $\delta_1: y = x + 1$ και $\delta_2: y = x - 1$ και τα σημεία $P_1(0, -1)$, $P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P_3(0, 1)$, $P_4\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$]

53. Να δείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων

$$c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{και} \quad c': \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

βρίσκονται σε κύκλο.

[Από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων προκύπτει $x = \pm \frac{12}{5}$ και $y = \pm \frac{12}{5}$. Άρα τα σημεία τομής είναι τα... που είναι κορυφές τετραγώνου. Συνεπώς...βλέπε και άσκηση 30]

54. Να βρεθούν η εκκεντρότητα και οι εστίες της έλλειψης $c: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$, καθώς και η εφαπτομένη της δ στο σημείο $M(2, 3)$.

[Προκύπτει: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $E'(0, -\sqrt{10})$, $E(0, \sqrt{10})$ και $\delta: \frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 1$]

55. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $c: 4x^2 + 9y^2 = 36$ στα κοινά σημεία αυτής και της ευθείας $\varepsilon: 4x + 3y = 6$.

[Τα κοινά σημεία είναι τα $M(0,2)$ και $M'\left(\frac{15}{2}, -\frac{6}{5}\right)$ και οι εφαπτομένες σ' αυτά είναι αντιστοίχως οι : $\delta_1: y = 2$ και $\delta_2: 40x - 45y - 150 = 0$. — Βλέπε και άσκηση 12.]

56. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $c: 4x^2 + 25y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 2x - 3y + 1 = 0$.

[Βλέπε άσκηση 13. – Προκύπτει : $2x - 3y + 2\sqrt{34} = 0$ και $2x - 3y - 2\sqrt{34} = 0$]

57. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $c: 5x^2 + y^2 = 5$ που είναι κάθετες προς την ευθεία $\varepsilon: x + 5y = 1$.

[Βλέπε άσκηση 14. – Προκύπτει $5x - y - \sqrt{30} = 0$ και $5x - y + \sqrt{30} = 0$]

58. Να δείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $P(5, 0)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: 6x + 12y - 1 = 0$, εφάπτεται στην έλλειψη $c: 4x^2+9y^2=36$.

[Είναι $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}(x - 5)$. Άρα ...(Βλέπε άσκηση 13 – 2ος τρόπος –)]

★ **59.** Να δείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση

$$y = \lambda x + \sqrt{\alpha^2\lambda^2 + \beta^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

εφάπτονται στην έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

[Βλέπε άσκηση 15]

60. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή του συστήματος αναφοράς η οποία εφάπτεται στην ευθεία ε: $4x + 3y = 11$ στο σημείο της $P(2, 1)$.

[Βλέπε άσκηση 16. – Προκύπτει: $2x^2 + 3y^2 = 11$]

61. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα πάνω στον $x'x$ και εφάπτεται της ευθείας ε: $y = \lambda x + \mu$.

[Προκύπτει: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \lambda^2\alpha^2} = 1$ —Βλέπε και άσκηση 16].

62. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται των ευθειών

$$\varepsilon_1: 2\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0.$$

[Ξέρουμε ότι για να εφάπτεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στην ευθεία δ: $y = \lambda x + \kappa$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $\beta^2 + \alpha^2\lambda^2 = \kappa^2$. (Βλέπε θεωρία στη σελ. 133) Άρα πρέπει $12\alpha^2 + \beta^2 = 16$ και $4\alpha^2 + 3\beta^2 = 16$, οπότε προκύπτει: $\alpha^2 = 1$ και $\beta^2 = 4$ ...]

63. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο $M(-1, 4)$ και εφάπτεται της ευθείας ε: $4x + y = 10$.

[Βλέπε άσκηση 17. – Προκύπτει: c: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ και c′: $\frac{4x^2}{5} + \frac{y^2}{80} = 1$]

64. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E'(-2, 0)$, $E(2, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας ε: $2x + 3y + 9 = 0$.

[Η έλλειψη έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $x'x$ άρα η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Τότε έχουμε $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 = 4$. Επίσης είναι ε: $y = -\frac{2}{3}x - 3$, και για να εφάπτεται της έλλειψης πρέπει: $\beta^2 + \alpha^2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = (-3)^2$ (βλέπε άσκηση 15). Άρα προκύπτει $5x^2 + 9y^2 = 45$]

65. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης c: $5x^2 + 9y^2 = 45$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(3, 5)$.

[Βλέπε άσκηση 18. – Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι ε_1: $x = 3$ και ε_2: $2x - 3y + 9 = 0$].

66. Δίνεται η έλλειψη c: $x^2 + 4y^2 = 40$ και το σημείο $P(8, 2)$

α) Να δείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που διέρχονται από το P.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\omega}$ αυτών των εφαπτομένων.

[Βλέπε άσκηση 19. – Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $x + 6y - 20 = 0$ και $3x - 2y - 20 = 0$, και $εφω = \frac{20}{9}$]

67. Δίνεται η έλλειψη $c: 9x^2 + 4y^2 = 36$ και το σημείο $P(2, 5)$.

α) Να δείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που διέρχονται από το P.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\omega}$ αυτών των εφαπτομένων.

[Βλέπε άσκηση 20. – Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι: $x = 2$ και $4x - 5y + 17 = 0$, οπότε $σφω = \frac{4}{5}$]

68. Δίνεται η έλλειψη $c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ και το σημείο $P(3,5)$.

α) Να δείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που διέρχονται από το P.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους.

[Βλέπε άσκηση 20. – Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι: $x = 3$ και $y = 5$].

69. Από το σημείο $P(2, 3)$ φέρνουμε τις εφαπτομένες της έλλειψης $c: 3x^2 + 4y^2 = 12$. Να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου P από τη χορδή της έλλειψης που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων.

[Βλέπε άσκηση 21. – Η ζητούμενη χορδή είναι η $ε: x + 2y - 2 = 0$ και η απόσταση $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$]

70. Δίνεται η έλλειψη $c: 5x^2 + 8y^2 = 40$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της έλλειψης που αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες ίσα τμήματα.

[Βλέπε άσκηση 22. – Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $ε: y = -x + \sqrt{13}$]

71. Δίνεται η έλλειψη $c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{34} = 1$. Να βρεθούν οι κορυφές του ορθογωνίου $E'KEΛ$ (E', E οι εστίες της έλλειψης), όταν τα σημεία $K, Λ$ βρίσκονται πάνω στην έλλειψη.

[Βλέπε άσκηση 24. – Τα ζητούμενα σημεία είναι:
τα $\left(\frac{9}{5}, \frac{4\sqrt{34}}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{4\sqrt{34}}{5}\right)$ ή τα $\left(-\frac{9}{5}, \frac{4\sqrt{34}}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{5}, -\frac{4\sqrt{34}}{5}\right)$]

72. Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο μιας καμπύλης c και είναι

$$\overrightarrow{OM} = α\,συνt\,\vec{i} + β\,ημt\,\vec{j}$$

όπου $α, β$ σταθεροί θετικοί αριθμοί και $t \in \mathbb{R}$ παράμετρος, να δείξετε ότι η καμπύλη c είναι έλλειψη.

[Βλέπε άσκηση 25. – Η έλλειψη είναι c: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$]

73. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ κι' ένα τυχαίο σημείο της $M(5, y_1)$, $y_1<0$. Αν A' και A είναι οι κύριες κορυφές της έλλειψης, να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{A'MA}=\widehat{\omega}$.

[Προκύπτει: $y_1=-2$ και $\varepsilon\varphi\,\omega=\frac{\lambda_{MA'}-\lambda_{MA}}{1+\lambda_{MA'}\cdot\lambda_{MA}}=\ldots=-4\sqrt{30}$]

74. Δίνονται το σημείο $E(3,2)$ και η ευθεία δ: $x=6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου τους, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το E και την ευθεία δ είναι 1/2.

[Βλέπε άσκηση 27. – Ο Γ.Τ. είναι η έλλειψη c: $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$]

75. Δίνονται τα σημεία $K(1,2)$ και $P(3,4)$. Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\lambda_{MK}\cdot\lambda_{MP}=-3$, όπου λ είναι ο σ.δ.

[Έστω $M(x,y)$. Τότε είναι $\frac{y-2}{x-1}\,\frac{y-4}{x-3}=-3\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\frac{3(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$. — Βλέπε και άσκηση 27.]

76. Δίνεται η έλλειψη c: $5x^2+8y^2=80$ και το σημείο $P(3,2)$. Να δείξετε ότι το P είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης και να βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο P.

[Βλέπε άσκηση 28. – Η ζητούμενη χορδή έχει εξίσωση $15x+16y-77=0$]

77. Δίνεται η έλλειψη c: $4x^2+9y^2=36$ και το σημείο $M(2,1)$. Να δείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης και να βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο M.

[Βλέπε άσκηση 28. – Η ζητούμενη χορδή έχει εξίσωση $8x+9y-25=0$]

78. Δίνονται οι ελλείψεις c_1: $4x^2+9y^2=36$ και c_2: $9x^2+4y^2=36$. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις αυτές τέμνονται σε τέσσερα σημεία που βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την ακτίνα.

[Βλέπε άσκηση 30. – Προκυπτει: $\varrho=6\sqrt{\frac{2}{13}}$]

79. Να βρεθεί το μήκος της χορδής της έλλειψης c: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η οποία διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$ και είναι κάθετη στο μεγάλο άξονά της.

[Αν $K\Lambda$ είναι η ζητούμενη χορδή, τότε είναι $K\Lambda$: $x=\gamma$. Οπότε...προκύπτει ότι: $K\left(\gamma,\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$ και $\Lambda\left(\gamma,-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$, άρα $(K\Lambda)=\frac{2\beta^2}{\alpha}$]

80. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με α>β. Αν Β, Β′ είναι οι δευτερεύουσες κορυφές της έλλειψης και Ε′, Ε οι εστίες της και ισχύει $\widehat{BEB'}=\frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι: $\gamma=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

[Προκύπτει: $\beta=\gamma$. Άρα..]

81. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Θεωρούμε της εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ που τέμνει τη διευθετούσα της έλλειψης δ: $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ στο σημείο Κ. Αν $E(\gamma, 0)$ είναι η εστία της έλλειψης, να δείξετε ότι $EM \perp EK$.

[Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ είναι... οπότε βρίσκουμε $K\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, \frac{\beta^2(\gamma-x_1)}{\gamma y_1}\right)$.

Τότε οι συντελεστές διεύθυνσης των ΕΜ και ΕΚ είναι αντιστοίχως $\lambda_1=\frac{y_1}{x_1-\gamma}$ και $\lambda_2=\frac{\gamma-x_1}{y_1}$, συνεπώς... — Βλέπε άσκηση 31].

82. Δίνεται η έλλειψη c: $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, $\alpha>\beta$, και ένα τυχαίο σημείο της Ρ διαφορετικό από τις κύριες κορυφές της Α και Α′. Αν η εφαπτομένη στο Ρ τέμνει τις εφαπτομένες στα Α και Α′ στα σημεία Κ και Λ αντιστοίχως, να δείξετε ότι $y_K \cdot y_\Lambda=\beta^2$, όπου y_K, y_Λ οι τεταγμένες των σημείων Κ και Λ.

[Βλέπε άσκηση 32]

83. Δίνεται η έλλειψη c: $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$. Σ' ένα σημείο της Ρ φέρνουμε την εφαπτομένη της έλλειψης που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Κ και θεωρούμε την ευθεία ε την κάθετη στον $x'x$ στο σημείο Κ. Αν οι Α′Ρ και ΑΡ τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Λ και Μ, να δείξετε ότι ΚΛ = ΚΜ.

[Η εφαπτομένη της έλλειψης στο $P(x_1, y_1)$ είναι ... και τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $K\left(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0\right)$. Τότε οι εξισώσεις των ευθειών ε, ΡΑ′ και ΡΑ είναι αντιστοίχως $x=\frac{\alpha^2}{x_1}$, $y=\frac{y_1}{x_1+\alpha}(x+\alpha)$ και $y=\frac{y_1}{x_1-\alpha}(x-\alpha)$, οπότε οι συντεταγμένες των σημείων Λ και Μ είναι...]

84. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha^2>\beta^2$. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο κύκλος με διάμετρο το μικρό άξονα της έλλειψης να διέρχεται από τις εστίες της.

[Ο κύκλος είναι ο c': $x^2+y^2=\beta^2$, οπότε...πρέπει $\beta=\gamma$]

85. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος c^2: $x^2 + y^2 = \varrho^2$ με $\alpha > \varrho > \beta$.

Να δείξετε ότι η έλλειψη και ο κυκλος τέμνονται σε τέσσερα σημεία, που είναι άκρα δύο διαμέτρων της έλλειψης.

[Από τη λύση του συστήματος προκύπτει: $x = \pm \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\varrho^2 - \beta^2}$, $y = \pm \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}$. Άρα τα τέσσερα σημεία είναι ...Και επειδή είναι της μορφής $K(x_0, y_0)$, $\Lambda(-x_0, -y_0)$ είναι άκρα διαμέτρου της έλλειψης].

86. Να βρείτε τα σημεια της έλλειψης c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$, από τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα Ε'Ε (όπου Ε', Ε οι εστίες της c) φαίνεται υπό ορθή γωνία.

[**1ος τρόπος:** Έστω $M(x_1, y_1)$. Τότε $\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$ και

$$\lambda_{ME'} \cdot \lambda_{ME} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1 + \gamma} \cdot \frac{y_1}{x_1 - \gamma} = -1 \Leftrightarrow y_1^2 = \gamma^2 - x_1^2$$

(Προφανώς είναι $x_1 \neq -\gamma$ και $x_1 \neq \gamma$, γιατί αλλιώς το τρίγωνο Ε'ΜΕ θα είχε δυο ορθές γωνίες). Τότε...προκύπτει: $x_1 = \pm \frac{\sqrt{\gamma^4 - \beta^4}}{\gamma}$ και $y_1 = \pm \frac{\beta^2}{\gamma}$.

2ος τρόπος: Τα ζητούμενα σημεία είναι προφανώς τα κοινά σημεία της έλλειψης c και του κύκλου c': $x^2 + y^2 = \gamma^2$ που έχει διάμετρο το τμημα Ε'Ε. Άρα..]

87. Δίνεται η έλλειψη c: $x^2 + 4y^2 = 1$ και το σημείο της $M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Θεωρούμε την ημιευθεία Ε'Mz και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΜ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EMz}$. (Όπου Ε', Ε είναι οι εστίες της έλλειψης).

[Βρίσκουμε τους σ.δ. των Ε'Mz και ΕΜ και της εφαπτομένης ε. Αν $\widehat{\omega}_1$, $\widehat{\omega}_2$ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η ε με την Mz και τη ΕΜ, προκύπτει $\varepsilon\varphi\, \omega_1 = \varepsilon\varphi\, \omega_2 = \frac{2}{3}$.

Άρα...Βλέπε και άσκηση 37 – Παρατήρηση –].

88. Σε ένα τυχαίο σημείο $P(x_0, y_0)$ της έλλειψης c: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ φέρνουμε την εφαπτομένη και την κάθετη της έλλειψης που τέμνουν το μεγάλο άξονά της στα σημεία Κ και Λ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $\frac{(E', E, K)}{(E', E, \Lambda)} = -1$.

Δηλαδή τα σημεία Κ, Λ είναι συζυγή αρμονικά των εστιών Ε', Ε.

[Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Ρ τέμνει τον x'x στο $K\left(\frac{5}{x_0}, 0\right)$ και η κάθετη στο $\Lambda\left(\frac{x_0}{5}, 0\right)$. Άρα...$(E', E, K) = \ldots = \frac{x_0 + 5}{x_0 - 5}$, και...Βλέπε και άσκηση 38.]

89. Αν ε: $y = x + \kappa$ είναι μια εφαπτομένη της έλλειψης c: $x^2 + 2y^2 = 2$, να δείξετε ότι η προβολή της εστίας Ε στην εφαπτομένη αυτή είναι σημείο του περιγεγραμμένου στην έλλειψη κύκλου.

[Βλέπε άσκηση 44. Η προβολή ειναι το σημειο $M\left(\frac{1-\varkappa}{2}, \frac{1+\varkappa}{2}\right)$ και για ν' ανήκει στον περιγεγραμμένο στην έλλειψη κύκλο c': $x^2 + y^2 = \alpha^2 = 2$, πρέπει $(1-\varkappa)^2 + (1+\varkappa)^2 = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow \varkappa^2 = 3$ που ισχύει, αφού είναι $\beta^2 + \alpha^2\lambda^2 = \varkappa^2$ $(\lambda = 1)$. Βλέπε θεωρία στη σελ. 133]

90. Δίνεται η έλλειψη c: $4x^2 + 9y^2 = 36$ και η ευθεία ε: $x + 3\sqrt{2}\,y = 9$. Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται της έλλειψης και η προβολή μιας εστίας της έλλειψης στην ε ανήκει στον περιγεγραμμένο στην έλλειψη κύκλο.

[Βλέπε άσκηση 44. – Η ευθεία ε εφάπτεται της c γιατί... Έστω τώρα Ρ η προβολή της εστίας $E(\gamma, 0)$ στην εφαπτομένη ε.

Τότε είναι $EP \perp \varepsilon$ και EP: $y = 3\sqrt{2}\,(x - \sqrt{5})$. Άρα οι συντεταγμένες του Ρ, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών, και επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = \alpha^2 = 9$.]

91. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα μεταβλητό σημείο της $P(x_1, y_1)$ με $x_1y_1 \neq 0$. Θεωρούμε την εφαπτομένη της έλλειψης στο Ρ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Κ και τον $y'y$ στο Λ. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι το σημείο της ΚΛ για το οποίο ισχύει $(K, \Lambda, M) = 3$, να δείξετε ότι τα σημεια Μ (όταν μεταβάλεται το Ρ) είναι σημεία της γραμμής $\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} = 16$.

[Η εφαπτομένη της έλλειψης στο $P(x_1, y_1)$ είναι...και τέμνει τους άξονες στα σημεία $K\left(\frac{\beta^2}{x_1}, 0\right)$ και $\Lambda\left(0, \frac{\beta^2}{y_1}\right)$. Τότε έχουμε $(K, \Lambda, M) = 3 \Leftrightarrow \ldots\ x_1 = \frac{\alpha^2}{4x_0}$, $y_1 = \frac{3\beta^2}{4y_0}$. Αλλά το $P(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε...]