

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
 - i. Αν A είναι η προβολή της εστίας E μιας παραβολής στη διευθετούσα της, τότε το μέσον K του EA λέγεται της παραβολής.
 - ii. Αν η παραβολή C έχει εστία το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta: 2x + p = 0$, τότε η C έχει εξίσωση
 - iii. Η παραβολή $C: x^2 = 2py$ έχει εστία το σημείο και διευθετούσα την ευθεία
 - iv. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι:
 - v. Η παραβολή $C: y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον
 - vi. Η παραβολή $C: y^2 = 2px$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα δ και
 - vii. Αν η χορδή AB της παραβολής $C: y^2 = 2px$ διέρχεται από την εστία της E και είναι $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ τότε $y_1 y_2 = \dots\dots\dots$
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
 - i. Η εστία της παραβολής $x^2 = 2py$ είναι το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$
 - ii. Η διευθετούσα της παραβολής $C: x^2 = 2py$ είναι η ευθεία $2y + p = 0$
 - iii. Αν $p < 0$ η παραβολή $C: y^2 = 2px$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία $2x + p = 0$ και το σημείο $(\frac{p}{2}, 0)$.

- iv. Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $C: x^2 = 2py$
- v. Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στην κορυφή της είναι ο άξονας $y'y$.
- vi. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι: $xx_1 = p(y + y_1)$.

i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - i. Όταν έχει εστία το σημείο $E(5, 0)$
 - ii. Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x = 1$.
 - iii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$
4. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - i. Όταν έχει εστία το σημείο $E(0, 3)$
 - ii. Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $2y - 1 = 0$
 - iii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$
5. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:
 - i. $y^2 = -4x$
 - ii. $y = \frac{1}{2}x^2$

6. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.
- Όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$.
 - Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$
 - Όταν διέρχεται από το σημείο $B(0, 1)$
7. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$
- Να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C στο σημείο της $A(1, \lambda)$, $\lambda > 0$.
 - Αν η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο M , να βρείτε την άλλη εφαπτομένη της παραβολής C που διέρχεται από το M .
8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής $C: y^2 = 6x$ που απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\sqrt{3}$
9. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2x$ που απέχει από την εστία της απόσταση $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
10. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 4x$ που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\frac{1}{2}$ τ.μ. .
11. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 4x$ η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία A, B και είναι: $(AB) = \sqrt{2}$.
12. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 4x$ στα σημεία της $A(4, 4)$ και $B(\frac{1}{4}, -1)$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.
13. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και το σημείο της $M(\lambda, 2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευ-

θεία ME και η ημιευθεία Mt , που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.

14. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 2$ και της παραβολής $C_2: y^2 = 8x$ και να δείξετε ότι είναι κάθετες.
15. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 2px$. Αν το σημείο $A(1, \lambda)$, $\lambda > 0$ είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2 , τότε:
- να βρείτε τα λ και p .
 - να βρείτε το άλλο κοινό σημείο των C_1 και C_2 .
 - να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο A εφάπτεται στο κύκλο C_1 και μετά να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη στο άλλο κοινό τους σημείο.
16. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου C_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$, $B(2, \mu)$ και η εφαπτομένη της παραβολής $C_2: y = x^2$ στο σημείο της B είναι και εφαπτομένη του κύκλου C_1 .
17. Έστω η οικογένεια των ευθειών: $\varepsilon_\lambda: \lambda^2 x + 2\lambda y + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \neq 0$ και η παραβολή $C: y^2 = x$
- Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο της παραβολής C διαφορετικό του O διέρχεται μόνο μια ευθεία που ορίζεται από την (1).
18. Έστω η παραβολή $C_1: y^2 = 2px$, $x \geq 0$ και ο κύκλος C_2 που διέρχεται από την εστία της παραβολής και έχει το κέντρο του πάνω στην παραβολή C_1 . Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται της διευθετούσας της C_1 .
19. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2x$ και η ευθεία ε που τέμνει την παραβολή στα σημεία A και B και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2, 0)$. Να δείξετε ότι $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

20. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και μια χορδή της AB που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B ώστε $\widehat{AOB} = 90^\circ$.
21. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και μια ευθεία ε που διέρχεται από την εστία της και τέμνει την παραβολή στα σημεία M_1 και M_2 . Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής C στα σημεία M_1 και M_2 είναι κάθετες.
22. Μια ευθεία $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ τέμνει τη παραβολή $C: y^2 = 2x$ σε δύο σημεία A και B . Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το μέσο M του AB .
23. Από το σημείο $M(5, 6)$ φέρουμε τις εφαπτομένες MA, MB στην παραβολή $C: y^2 = 4x$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB .
24. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής $C: y^2 = 12x$ που έχει μέσο το σημείο $M(3, 2)$.
25. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2x$ και η ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκονται τα μέσα των χορδών που ορίζουν στη C οι ευθείες που είναι κάθετες στην ε .
26. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = x + \beta$ και η παραβολή $C: y^2 = 2x$
- Να βρείτε τις τιμές του β ώστε η ε να τέμνει την C σε δύο διακεκρυμένα σημεία.
 - Αν $\beta < \frac{1}{2}$ και η ε τέμνει τη C στα σημεία A και B , να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το μέσο M του AB .
27. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2x$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$. Αν η εφαπτομένη ε της παραβολής C στο A τέμνει τον άξονα $y'y$ στο B και M το μέσον του AB , να βρείτε πού κινείται το M , όταν το A κινείται στη παραβολή C .

28. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$. Αν η απόστασή του σημείου M από τον άξονα $y'y$ είναι ίση με το εφαπτόμενο τμήμα MA στον κύκλο C , να βρείτε πού κινείται το M .
29. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει:

$$y^4 - 16x^2 = 0.$$
30. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M που ισαπέχουν από το σημείο $A(2, 0)$ και από την ευθεία $\varepsilon: x + 2 = 0$.
31. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M τα οποία ισαπέχουν από το σημείο $A(-4, 0)$ και την ευθεία $\varepsilon: x = 4$.
32. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{v} = (x, y^2)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 3 = 0$.
33. Αν το σημείο A κινείται στη παραβολή $C: y^2 = -x$, να βρείτε πού κινείται το σημείο M για το οποίο ισχύει: $\vec{OM} = 2\vec{MA}$
34. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{v} = (x, y^2)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Θέμα 1

- A.
1. Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ .
 2. Να γράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής.
- B.
- Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
1. Έστω η παραβολή C με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ . Αν το σημείο A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ , τότε το μέσο K του EA λέγεται της παραβολής.
 2. Η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta: 2x + p = 0$ είναι:
 3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι:
- Γ.
- Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
1. Η παραβολή $C: y^2 = 2px$ έχει εστία $E(p, 0)$.
 2. Η παραβολή $C: y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.
 3. Η παραβολή $C: x^2 = 2py$ έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta: x + p = 0$.

1.	2.	3.

Θέμα 2

Έστω ότι η παραβολή C έχει εστία το σημείο $E(-1, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x - 1 = 0$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
- β. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής
 - i. που είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y - 1 = 0$.
 - ii. που διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Θέμα 3

Έστω ότι η απόσταση της εστίας της παραβολής $C: y^2 = 2px$, $p > 0$ από τη διευθετούσα της δ είναι ίση με 2.

- α. Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα της παραβολής C .
- β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(1, \mu)$, $\mu > 0$.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ME και η ημιευθεία Mt , που είναι ομόρροπη της OE .
- δ. Αν η εφαπτομένη ϵ , του β. ερωτήματος τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B , να βρείτε την άλλη εφαπτομένη της C που διέρχεται από το B .

Θέμα 4

Δίνεται η παραβολή: $C: y^2 = 2px$, με $p > 1$ και η χορδή της AB που διέρχεται από την εστία E και το μέσο της AB είναι το σημείο $M(\frac{3}{2}, 1)$.

- α. Να βρείτε την εστία της παραβολής C .
- β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών της παραβολής C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, -2)$.
- γ. Αν το σημείο N κινείται στην παραβολή C , να βρείτε πού κινείται το σημείο P για το οποίο ισχύει: $\vec{OP} = 2\vec{PN}$.