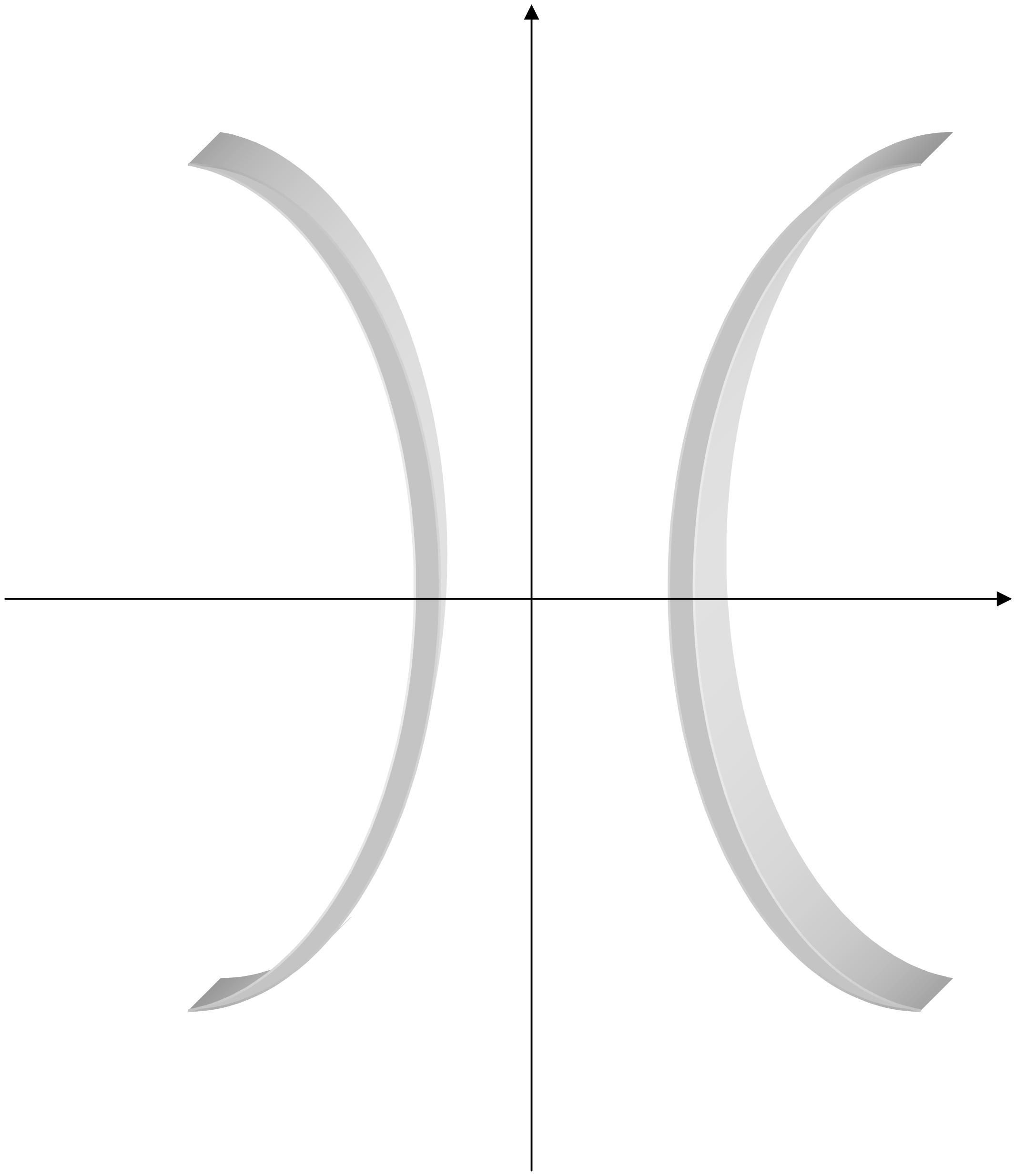
Υπερβολή



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

54. Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα των υπερβολών

i) c_1: $4x^2 - 9y^2 = 36$, **ii)** c_2: $16y^2 - 9x^2 = 144$.

[Βλέπε άσκηση 1. — Προκύπτει: i) $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = \sqrt{13}$, $E'(-\sqrt{13}, 0)$, $E(\sqrt{13}, 0)$, $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{3}$, ii) $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $E'(0, -5)$, $E(0, 5)$, $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3}$].

55. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κέντρο το $O(0, 0)$ πρωτεύοντα άξονα τον $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $K(6, 4)$ και $\Lambda(-4, 2)$.

Ποιά η εκκεντρότητα και ποιές οι ασύμπτωτες της υπερβολής;

[Βλέπε άσκηση 2. –Η εξίσωση της υπερβολής είναι η $3x^2 - 5y^2 = 28$, ...]

56. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη c: $9x^2 + 25y^2 = 225$ και εκκενρότητα $\varepsilon = 2$.

[Βλέπε άσκηση 3. –Η εξίσωση της υπερβολής είναι η $3x^2 - y^2 = 12$]

57. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη c: $5x^2 + 9y^2 = 45$.

[Προκύπτει: $x^2 - y^2 = 2$. — Βλέπε προηγούμενη άσκηση].

58. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{4}$, κέντρο το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(-5, \frac{9}{4}\right)$.

[Η εξίσωση της υπερβολής θα είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.
Άρα ...προκύπτει: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$]

59. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \pm\frac{4}{3}x$ και εστιακή απόσταση $2\gamma = 10$.

[Βλέπε άσκηση 4.– Οι ζητούμενες υπερβολές είναι οι: c: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ και c′: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$]

60. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \pm\frac{2}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο $M(2, -4)$.

[Βλέπε άσκηση 5.– Προκύπτει: $\frac{y^2}{7} - \frac{9x^2}{28} = 1$]

★61. Δίνεται η υπερβολή c: $24x^2 - 25y^2 = 600$. Να βρεθούν οι εστιακές ακτίνες του σημείου $M(-7, 4.8)$ αυτής.

[Βλέπε άσκηση 6. –προκύπτει $r' = \frac{24}{5}$ και $r = \frac{74}{5}$]

★62. Δίνεται η υπερβολή $c: 9x^2 - 16y^2 = 144$ και το σημείο της $M(x, y)$. Αν η εστιακή ακτίνα του M από την εστία $E'(-\gamma, 0)$ είναι $r' = \frac{9}{4}$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του M.

[Έχουμε $r' = \left|\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha\right|$ άρα ... Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$ και $M'\left(-5, \frac{9}{4}\right)$]

★63. Δίνεται η υπερβολή $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ με εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$. Αν η απόσταση του σημείου της $M(x_1, y_1)$ από την εστία της $E(\gamma, 0)$ είναι $r = 8$, να βρεθεί η απόσταση του M από τη διευθετούσα δ: $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$.

[Βλέπε άσκηση 8. — Προκύπτει $d(M, \delta) = 4$].

64. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κέντρο το $O(0, 0)$, τις εστίες της στον άξονα $x'x$, διέρχεται από το σημείο $P(6, 8)$ και οι εστιακές ακτίνες του P είναι κάθετες μεταξύ τους.

[Βλέπε άσκηση 7.–Προκύπτει: $4x^2 - y^2 = 80$].

65. Να βρεθούν τα σημεία M της υπερβολής $c: x^2 - y^2 = 4$ που οι εστιακές ακτίνες τους $E'M$ και EM είναι κάθετες. Να δείξετε ακόμα ότι τα σημεία αυτά M ανήκουν σε κύκλο που διέρχεται από τις εστίες E' και E

[Αν $M(x, y)$, τότε $E'M \perp EM$ άρα ... $x^2 + y^2 = \gamma^2 = 8$ (1) (βλέπε άσκηση 7). Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και $x^2 - y^2 = 4$ βρίσκουμε τα σημεία M...τα οποία ανήκουν στον κύκλο (1)].

66. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κορυφές τις εστίες της έλλειψης $c: 144x^2 + 169y^2 = 144 \cdot 169$ και εστίες τις κύριες κορυφές της έλλειψης.

[Για την έλλειψη έχουμε $\alpha=13$, $\beta=12$, $\gamma=5$, οπότε για την υπερβολη έχουμε $\gamma_1=\alpha=13$, $\alpha_1=\gamma=5$,... Η υπερβολή είναι η $144x^2 - 25y^2 = 144 \cdot 25$].

67. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1: $3x - 4y = -24$ και ε_1: $3x + 4y = -6$ τέμνονται πάνω στην υπερβολή $c: 9x^2 - 16y^2 = 144$.

[Το σημείο τομής των ευθειών είναι το $P\left(-5, \frac{9}{4}\right)$, άρα ...]

68. Δίνεται η υπερβολή $c: 9x^2 - 16y^2 = 144$ με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$. Να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα $E'E$ τέμνει την υπερβολή σε τέσσερα σημεία που είναι κορυφές ορθογωνίου.

[Είναι... $\gamma = 5$, οπότε ο κύκλος είναι: $x^2 + y^2 = 25$. Τότε τα σημεία τομής είναι

$P_1\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $P_2\left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $P_3\left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $P_4\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

και από τις συντεταγμένες τους παρατηρούμε ότι: $P_1P_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} P_3P_4 \mathbin{/\mkern-5mu/} x'x$ και $P_1P_4 \mathbin{/\mkern-5mu/} P_2P_3 \mathbin{/\mkern-5mu/} y'y$].

69. Να δείξετε ότι τα σημεία τομής της έλλειψης και της υπερβολής

$$c: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{και} \quad c': \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

είναι κορυφές ορθογωνίου του οποίου να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

[Τα σημεία τομής είναι τα $P_1(4, 1)$, $P_2(-4, 1)$, $P_3(-4, -1)$, $P_4(4, -1)$. Και από τις συντεταγμένες τους παρατηρούμε ότι: $P_1P_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} P_3P_4 \mathbin{/\mkern-5mu/} x'x$ και $P_1P_4 \mathbin{/\mkern-5mu/} P_2P_3 \mathbin{/\mkern-5mu/} y'y$... Τότε έχουμε : P_1P_2: $y=1$, P_3P_4: $y-1$, P_1P_4: $x = 4$, P_2P_3: $x = -4$].

70. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $c: 16x^2 - 9y^2 = 144$ και της ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y - 6 = 0$.

[Προκύπτει $E = 4$ τ.μ].

71. Να δείξετε ότι η απόσταση μιας εστίας της υπερβολής $c: 3y^2 - 5x^2 = 30$ από μια ασύμπτωτή της, είναι ίση με $\beta = \sqrt{6}$.

[Βλέπε άσκηση 9]

72. Δίνεται η υπερβολή $c: y = \dfrac{1}{x}$ και ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμένο σ' αυτή, με $A(1, 1)$, $B\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ και $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}, 4\right)$. Δείξτε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στην υπερβολή.

[Το ορθόκεντρο του ΑΒΓ είναι το $H\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$, άρα... — Βλέπε και άσκηση 33].

73. Να βρεθούν τα σημεία Μ της υπερβολής $c: 16x^2 - 9y^2 = 144$ που απέχουν $d = 7$ από τη αρθιστερή εστία της.

[... είναι $\gamma = 5$ άρα $E'(-5, 0)$ και τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται και στον κύκλο $(x+5)^2 + y^2 = 49$. Άρα... έχουμε: $M(-6, 4\sqrt{3})$ και $M'(-6, -4\sqrt{3})$.

74. Αν ε_1 και ε_2 είναι οι εκκεντρότητες δύο συζυγών υπερβολών, να δείξετε ότι $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}$.

[Βλέπε άσκηση 11].

75. Αν ε_1 και ε_2 είναι οι εκκεντρότητες δύο συζυγών υπερβολών, να δείξετε ότι το σημείο $P\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}, \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$ ανήκει στον κύκλο $c: x^2 + y^2 = 1$.

[Βλέπε άσκηση 11].

76. Δίνεται η υπερβολή c: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κορυφές $A'(-\alpha, o)$ και $A(\alpha, 0)$. Έστω επίσης c' η συζυγής υπερβολή της c και $E'_1(0,-\gamma)$, $E_1(0,\gamma)$ οι εστίες της c'. Αν το ευθύγραμμο τμήμα $A'A$ φαίνεται υπό γωνία $\frac{\pi}{3}$ από κάθε εστία της c', να βρεθούν οι εκκεντρότητες των υπερβολών c και c'.

[Βλέπε το σχήμα της άσκησης 11. Αν λ_1, λ_2 είναι οι σ.δ των $A'E_1$ και AE_1 έχουμε: $\lambda_1=\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon_1$ και $\lambda_2=-\frac{\gamma}{\alpha}=-\varepsilon_1$.

Αν είναι επίσης $\widehat{\omega}=(\widehat{A'E_1, AE_1})$, τότε $\varepsilon\varphi\ \omega=\sqrt{3}\Leftrightarrow \ldots \frac{-\varepsilon_1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\varepsilon_1=\sqrt{3}$. Επομένως...

$\varepsilon_2=\frac{3}{2}$, όπως προκύπτει από τη σχέση $\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2=\varepsilon_1{}^2\cdot\varepsilon_2{}^2$ της άσκησης 11].

77. Δίνεται η υπερβολή c: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και έστω ε_1: $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, ε_2: $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ οι ασύμπτωτές της. Αν η γωνία των ασυμπτώτων είναι $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})=\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί η εκκεντρότητα ε της υπερβολής.

[Έστω $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}>0$ και $\lambda'=-\frac{\beta}{\alpha}$. Τότε είναι $\lambda'=-\lambda$ και $\varepsilon\varphi\ \frac{\pi}{3}=\frac{-\lambda-\lambda}{1-\lambda^2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda=\sqrt{3}$. Άρα $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{3}$.
Αλλά $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2\ldots$ Προκύπτει $\varepsilon=2$. — Βλέπε και άσκηση 12.–]

78. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής c: $16x^2-y^2=64$ στο σημείο της $M(\varkappa, 4)$ με $\varkappa>0$.

[Το σημείο είναι $M(\sqrt{5}, 4)$ και η εφαπτομένη σ' αυτό είναι $\varepsilon: 4\sqrt{5}\,x-y-16=0$]

79. Δίνεται η υπερβολή c: $4x^2-9y^2=36$. Να δείξετε ότι η ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο $P\left(-2,-\frac{1}{6}\right)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: 5x-6y+1=0$ είναι εφαπτομένη της c.

[Βλέπε άσκηση 14].

80. Δίνεται η παραβολή c: $\frac{5x^2}{32}-\frac{5y^2}{12}=1$ και η ευθεία ε: $y=\mu x-(\mu+1)$. Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται της υπερβολής c.

[Βλέπε άσκηση 14. –Προκύπτει: $\mu=1$, $\mu=-\frac{17}{27}$]

81. Να βρεθούν οι εξισώσεις τω εφαπτομένων της υπερβολής c: $9x^2-16y^2=144$ οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $y=2x+5$.

[Βλέπε άσκηση 15. — Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι: ε_1: $y=2x+\sqrt{55}$ και ε_2: $y=2x-\sqrt{55}$]

82. Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $c: x^2 - 4y^2 = 16$ στα οποία οι εφαπτομένες έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{5}{6}$.

[Βλέπε άσκηση16 –1ος τρόπος–. Τα ζητούμενα σημεία ειναι τα $M_1\left(5, \frac{3}{2}\right)$ και $M_2\left(-5, -\frac{3}{2}\right)$]

83. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων τηςυπερβολής $c: 3x^2 - 4y^2 = 12$ που είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x + 3y - 7 = 0$.

[Βλέπε άσκηση 17. –Οι εφαπτομένες είναι $y = 3x \pm \sqrt{33}$]

84. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της υπερβολής $c: 3x^2 - 4y^2 = 12$ που έχουν ίσες συντεταγμένες επί την αρχή.

[Έστω $\frac{x}{\varkappa} + \frac{y}{\varkappa} = 1$ η ευθεία...Προκύπτει ότι οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι: ε_1: $y = -x + 1$ και ε_2: $y = -x - 1$].

★85. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, τις εστίες της στον άξονα $x'x$ και εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1: 5x - y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 3y + 2 = 0$.

[Βλέπε άσκηση 18. –Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{5x^2}{32} - \frac{5y^2}{12} = 1$]

★86. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \sqrt{\alpha^2\lambda^2 - \beta^2}$, $|\lambda| > \frac{\beta}{\alpha}$, εφάπτεται της υπερβολής $c: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

[Βλέπε άσκηση 15 στην **έλλειψη**]

87. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $c: 5x^2 - 4y^2 = 20$ που διέρχονται από το σημείο $P(2, 3)$.

[Βλέπε άσκηση 19. –3 τρόποι– Οι εφαπτομένες είναι οι: $\varepsilon_1: x = 2$ και $\varepsilon_2: 7x - 6y + 4 = 0$].

88. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $c: 8x^2 - 9y^2 = 72$ που διέρχονται από το σημείο $K(1, 2)$

[Βλέπε άσκηση 19. –Οι εφαπτομένες είναι οι: $\varepsilon_1: y = x + 1$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$]

89. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, τις εστίες της στον άξονα $x'x$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 5x - 6y - 16 = 0$ στο σημείο της $M\left(5, \frac{3}{2}\right)$.

[Βλέπε άσκηση 22. –Η ζητούμενη υπερβολή είναι η $c: x^2 - 4y^2 = 16$]

90. Δίνεται η υπερβολή $c: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = \varkappa$ και το σημείο της $M(2, 6)$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της M.

[Επειδή οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής, βρίσκουμε $\kappa = -2$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι : $x - y + 4 = 0$].

91. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται έτσι ώστε η απόστασή του από το σημείο $E(5, 6)$ να είναι τα $\frac{5}{3}$ της απόστασής του από την ευθεία ε: $x = \frac{9}{5}$.

i) Να δείξετε ότι το M γράφει υπερβολή.

ii) Αν K, Λ είναι τα σημεία που η ευθεία ε τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $OK\Lambda$.

[Η υπερβολή είναι c: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Τα σημεία είναι $K\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ και $\Lambda\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$. Και το εμβαδό είναι $(OK\Lambda) = \frac{108}{25}$. Βλέπε και άσκηση 23.–]

92. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ο λόγος των αποστάσεών τους από το σημείο $E(-3, 2)$ και την ευθεία ε: $2x - 1 = 0$ είναι 2.

[Βλέπε άσκηση 24.–Ο Γ.Τ. είναι η υπερβολή c: $\frac{(x - 5/3)^2}{49/9} - \frac{(y - 2)^2}{49/3} = 1$]

93. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους απο τα σημεία $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ να είναι 3.

[Είναι $|d(M, E') - d(M, E)| = 2\alpha = 3$ και $d(E', E) = 2\gamma = 4$ άρα... c: $\frac{y^2}{9/4} - \frac{x^2}{7/4} = 1$. Βλέπε και θεωρία].

94. Να δείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \beta\,\varepsilon\varphi\theta\right)$ για $\theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, ανήκουν σε μια υπερβολή.

[Έστω $M(x, y)$. Τότε είναι $x = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, $y = \beta\,\varepsilon\varphi\,\theta$, άρα... Προκύπτει: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$]

95. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(1, 3)$. Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4$, όπου λ_1 και λ_2 είναι οι σ.δ των ευθειών MA και MB αντιστοίχως.

[Ο Γ.Τ είναι η υπερβολή c: $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = 8$. –Βλέπε και άσκηση 24.–]

96. Δίνεται η υπερβολή c: $5x^2 - 3y^2 = 30$ και το σημείο $P(2, 4)$.

i) Να δείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο της υπερβολής.

ii) Αν PM και PN είναι οι εφαπτομένες της υπερβολής που διέρχονται από το σημείο P, να βρείτε την εξίσωση της χορδής MN.

[Βλέπε άσκηση 26.— Η εξίσωση της χορδής MN είναι $5x - 6y = 15$].

97. Δίνεται η υπερβολή c: $6x^2 - 3y^2 = 30$ και η ευθεία ε: $2x - 5y + 5 = 0$. Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει την υπερβολή σε δύο σημεία K και Λ και να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της χορδής $K\Lambda$.

[Βλέπε άσκηση 27.–Προκύπτει: $M\left(\frac{5}{13}, \frac{15}{13}\right)$]

98. Δίνεται η υπερβολή $c: x^2 - y^2 = 12$ και ένα σημείο της P. Αν M είναι το μέσο του τμήματος OP, να δείξετε ότι το M γράφει υπερβολή όταν το P κινείται στην υπερβολή c.

[Βλέπε άσκηση 28. — Η ζητούμενη υπερβολή είναι η $c': x^2 - y^2 = 3$].

99. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = \alpha^2$ (1). Αν P_1P_2 είναι μια τυχαία χορδή της παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι η P_1P_2 φαίνεται από κάθε κορυφή της υπερβολής υπό ορθή γωνία.

[Έστω P_1P_2: $y = \varkappa$ (2). Τότε από το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $P_1(-\sqrt{\varkappa^2 + \alpha^2}, \varkappa)$ και $P_2(\sqrt{\varkappa^2 + \alpha^2}, \varkappa)$. Άρα $\lambda_{AP_1} \cdot \lambda_{AP_2} = \ldots = -1$].

100. Το συμμετρικό μιας εστίας υπερβολής (ή έλλειψης) ως προς την εφαπτομένη της σ' ένα τυχαίο σημείο της M, βρίσκεται στον κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία και ακτίνα 2α.

[Βλέπε και άσκηση 29].

101. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = \alpha^2$ και ένα σημείο της M διαφορετικό από τις κορυφές της A και A'. Αν η κάθετη της υπερβολής στο M τέμνει τους άξονες στα σημεία K και Λ, να δείξετε ότι $MK = M\Lambda = MO$.

[Βλέπε και άσκηση 30].

102. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = \alpha^2$ και έστω $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ οι εστίες της. Να βρεθούν τα σημεία M της υπερβολής που οι εστιακές ακτίνες τους $E'M$ και EM είναι κάθετες.

Να δείξετε ακόμα ότι τα σημεία αυτά M ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ που διέρχεται από τις εστίες.

[Έστω $M(x, y)$, τότε $E'M \perp EM$ άρα... $x^2 + y^2 = \gamma^2$ (1). Συνεπώς οι συντεταγμένες των σημείων M είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Οπότε έχουμε... και τα σημεία αυτά ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση την (1). — Βλέπε και άσκηση 7.–]

103. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = \alpha^2$ και τα σημεία της $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$ και $B(\alpha\sqrt{2}, \alpha)$. Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο H του τριγώνου $AA'B$ είναι σημείο της υπερβολής.

[Η εξίσωση του ύψους BH είναι $x = \alpha\sqrt{2}$ και του ύψους AH είναι $y = -(\sqrt{2} + 1)(x - \alpha)$. Άρα... $H(\alpha\sqrt{2}, -\alpha)$, οπότε...].

104. Δίνεται η υπερβολή $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της M διέρχεται από το σημείο $K(0, -\beta)$ και η κάθετη της υπερβολής στο Μ διέρχεται από το σημείο $\Lambda(2\sqrt{2}\alpha,\ 0)$, να δείξετε ότι η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \sqrt{2}$.

[Έστω $M(x_1, y_1)$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι ... και επειδή διέρχεται από το σημείο $K(0, -\beta)$ προκύπτει ότι είναι $y_1 = \beta$. Όμοια για την κάθετη... έχουμε $x_1 = \dfrac{2\sqrt{2}\,\alpha^3}{\gamma^2}$. Αλλά $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} - \dfrac{y_1^2}{\beta^2} = 1$ άρα ... άρα $\dfrac{\gamma^4}{\alpha^4} = 4$ άρα $\varepsilon^4 = 4$]

105. Αν η ευθεία ε: $y = \lambda x + \kappa$ τέμνει την υπερβολή c: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και τις ασύμπτωτές της κατά σειρά στα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, να δείξετε ότι ΓΔ = ΕΖ.

[Όμοια με την άσκηση 40.]

106. Η εφαπτομένη μιας υπεβολής c σ' ένα σημείο της Μ τέμνει τις ασύμπτωτες της c στα σημεία Κ και Λ. Αν Ο′ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς το Μ, να δείξετε ότι το ΟΚΟ′Λ είναι παραλληλόγραμμο.

[Στην άσκηση 41 δείξαμε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ. Και αφού το Μ είναι και το μέσο του τμήματος ΟΟ′, άρα το ΟΚΟ′Λ είναι παραλληλόγραμμο].

107. Από ένα τυχαίο σημείο Ρ της υπερβολής c: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτές της που τις τέμνουν στα σημεία Γ και Δ. Να δείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΟΓΡΔ έχει σταθερό εμβαδό.

[Φέρνουμε την εφαπτομένη της υπερβολής στο Ρ που τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Κ και Λ. Τότε, όπως δείξαμε στην άσκηση 42, το εμβαδό του τριγώνου $(ΟΚΛ) = \alpha\beta$ = σταθερό.
Άρα είναι $(ΟΓΡΔ) = \dfrac{1}{2}(ΟΚΛ) = \dfrac{1}{2}\alpha\beta$ = σταθερό.

2ος τρόπος: Έστω $P(x_1, y_1)$. Τότε $ΡΔ // \varepsilon_1$, όπου $\varepsilon_1: y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$, άρα είναι $ΡΔ: y - y_1 = \dfrac{\beta}{\alpha}(x - x_1)$. Οπότε βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Δ και ύστερα το εμβαδό του τριγώνου ΟΡΔ. Άρα...]

108. Δείξτε ότι το εμβαδό του τριγώνου με πλευρές τις ευθείες $x-y=0$, $x+y=0$ και κάθε εφαπτομένη της υπερβολής c: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ είναι σταθερό.

[Όμοια με την άσκηση 42.–Προκύπτει: $E = \alpha^2$ = σταθερό].

109. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής c: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ τέμνει τις ασύμπτωτές της στα Γ και Δ, να δείξετε ότι $(ΟΓ)\cdot(ΟΔ) = \gamma^2$.

[Προκύπτει: $\Gamma\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1}, \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1}\right)$ και $\Delta\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 + \alpha y_1}, \dfrac{-\alpha\beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1}\right)$.

Οπότε: $(ΟΓ)\cdot(ΟΔ) = \ldots = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{|\beta x_1 - \alpha y_1|}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma}{|\beta x_1 + \alpha y_1|} = \ldots = \gamma^2$]

110. Μια ασύμπτωτη της υπερβολής c: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τις διευθετούσες της υπερβολής δ': $x=-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ και δ: $x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ στα σημεία Κ και Λ. να δείξετε ότι $(K\Lambda)=2\alpha$.

[Θεωρούμε την ασύμπτωτη ε_1: $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$. Τότε είναι $K\left(-\dfrac{\alpha^2}{\gamma},-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$ και $\Lambda\left(\dfrac{\alpha^2}{\gamma},\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$. Άρα $(K\Lambda)=...2\alpha$].

111. Δίνεται η υπερβολή c: $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Θεωρούμε την εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Κ.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του ορθόκεντρου Η του τριγώνου ΟΜΚ.

β) Να δείξετε ότι το Η γράφει μια υπερβολή, όταν το Μ κινείται στην υπερβολή c.

[**α)** Είναι $K\left(\dfrac{\alpha^2}{x_1},0\right)$, οπότε είναι ... $H\left(x_1,-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}y_1\right)$.

β) Αν είναι $H(x_0, y_0)$, τότε έχουμε $\left\{x_0=x_1 \text{ και } y_0=-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}y_1\right\}$ ή $\left\{x_1=x_0 \text{ και } y_1=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}y_0\right\}$

οπότε η σχέση $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_1^2}{\beta^2}=1$ γίνεται $\dfrac{x_0^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_0^2}{\alpha^4/\beta^2}=1$, άρα ...]

112. Θεωρούμε την υπερβολή c: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και την εφαπτομένη της δ σε τυχαίο σημείο της $M(x_1, y_1)$ που τέμνει τις εφαπτομένες ε' και ε στις κορυφές της, στα σημεία Ρ′ και Ρ. Να δείξετε ότι το τμήμα Ρ′Ρ φαίνεται από τις εστίες της υπερβολής υπό ορθή γωνία (δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο το Ρ′Ρ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής).

[Είναι δ: $\dfrac{xx_1}{\alpha^2}-\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1$, ε': $x=-\alpha$, ε: $x=\alpha$.

Τότε έχουμε: $P'\left(-\alpha,-\dfrac{\beta^2(x_1+\alpha)}{\alpha y_1}\right)$ και $P\left(\alpha,\dfrac{\beta^2(x_1-\alpha)}{\alpha y_1}\right)$.

Και για τους σ.δ. λ_1 και λ_2 των ΕΡ′ και ΕΡ, όπου $E(\gamma, 0)$ έχουμε: $\lambda_1\cdot\lambda_2=...=-\dfrac{\beta^2(x_1^2-\alpha^2)}{\alpha^2y_1^2}=-1$.
Όμοια προκύπτει: $E'P'\perp E'P$]

113. Δίνεται η υπερβολή c: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ οι εστίες της. Αν δ': $x=-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ και δ: $x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι οι διευθετούσες της υπερβολής οι αντίστοιχες προς τις εστίες Ε′ και Ε, να δείξετε ότι:

i) Οι προβολές της εστίας Ε′ στις ασύμπτωτες της υπερβολής βρίσκονται στη διευθετούσα δ′, και οι προβολές της Ε στις ασύμπτωτες βρίσκονται στη διευθετούσα δ.

ii) Όλες οι παραπάνω προβολές ανήκουν στον κύκλο (0, α)

[Έστω Η η προβολή της εστίας Ε στην ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$. Τότε είναι $H\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$. Άρα $H \in \delta$ και $OH^2 = \ldots = \alpha^2$. Όμοια είναι και για τις άλλες προβολές].

114. Δίνεται η υπερβολή $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε της υπερβολής σ' ένα σημείο της $P(x_1, y_1)$ και την κάθετη από την εστία Ε στην ε που τέμνει την ευθεία OP στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι το Μ είναι σημείο της διευθετούσας $\delta: x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ της υπερβολής (της αντίστοιχης στην εστία Ε).

[Είναι $\varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$, οπότε η κάθετη από το Ε στην ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{y_1}{x_1}(x-\gamma)$ και τέμνει την $OP: y = \frac{y_1}{x_1}x$ στο Μ με $x_M = \ldots = \frac{\alpha^2}{\gamma}$. Άρα ...]

115. Δίνεται η υπερβολή $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και $\delta: x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ η διευθετούσα της η αντίστοιχη στην εστία $E(\gamma, 0)$. Αν η εφαπτομένη ε της υπερβολής σ' ένα σημείο της Ρ τέμνει τη δ στο σημείο Μ, να δείξετε ότι $\widehat{PEM} = \frac{\pi}{2}$.

[Είναι $\varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$. Οπότε προκύπτει $M\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, \frac{\beta^2}{\gamma}\frac{x_1-\gamma}{y_1}\right)$. Τότε οι σ.δ. των ΕΜ και ΕΡ είναι αντιστοίχως $\lambda_1 = -\frac{x_1-\gamma}{y_1}$ και $\lambda_2 = -\frac{y_1}{x_1-\gamma}$, άρα...]

116. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο μιας υπερβολής (διαφορετικό από τις κορυφές της) και ε είναι η εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ, να δείξετε ότι η ε σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ΜΕ′ και ΜΕ, όπου Ε′ και Ε οι εστίες της υπερβολής.

[Εργαστείτε όπως στην άσκηση 37 της **έλλειψης.** Βλέπε ύστερα και την παρατήρηση της ίδιας άσκησης].

117. Δίνεται η υπερβολή $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και Μ τυχαίο σημείο της. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς μια ασύμπτωτή της, που τέμνει την άλλη ασύμπτωτη στο σημείο Κ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΜΚ έχει σταθερό εμβαδό.

[Έστω $M(x_1, y_1)$ και $MK /\!/ \varepsilon_1$, όπου $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x$. Τότε έχουμε $MK: y - y_1 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_1)$ (1) και $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ (2). Και από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) προκύπτει:
$K\left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{2\beta}, -\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{2\alpha}\right)$. Άρα το εμβαδό είναι $E = \ldots = \alpha\beta$]

118. Αν $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$ είναι οι κορυφές της υπερβολής $c: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και Μ τυχαίο σημείο της και οι ΜΑ, ΜΑ′ τέμνουν την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(\Gamma\Delta) = \gamma$.