ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

α. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha^x$ είναι εκθετική με βάση το α, τότε για το α ισχύει .....

β. Η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης με βάση το α τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο .....

γ. Η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης με βάση το α, όπου $\alpha>1$ έχει ασύμπτωτη .....

δ. Αν $0<\alpha\neq 1$, η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το .....

ε. Αν $0<\alpha<1$, τότε η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ ως προς τη μονοτονία είναι .....

στ. Νόμος της εκθετικής μεταβολής είναι η συνάρτηση ....., με .....

ζ. Νόμος της εκθετικής απόσβεσης είναι η συνάρτηση ....., με .....

η. Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπαστεί ή να εξαφανιστεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργούς ουσίας λέγεται ..... ή .... της ραδιενεργούς ουσίας.

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Αν $\alpha>0$, $\mu,\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu>0$, τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$.

β. Αν $\alpha>0$, τότε η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha^x$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.

γ. Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ λέγεται εκθετική.

δ. Αν $\alpha>1$, η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν $0<\alpha<1$ και $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$.

στ. Αν $0<\alpha\neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ζ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>1$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα Ox.

η. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=\alpha^x \text{ και } g(x)=\alpha^{-x}\ ,\ 0<\alpha\neq 1$$

είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

θ. Αν $0<\alpha\neq 1$ και $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, τότε $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$.

ι. Αν η συνάρτηση $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ είναι ο νόμος της εκθετικής μεταβολής, τότε $Q_0>0$.

ια. Αν η συνάρτηση $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ είναι ο νόμος της εκθετικής απόσβεσης, τότε $c>0$.

ιβ. Αν t_0 η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού, τότε $Q(t_0)=\dfrac{Q_0}{2}$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.	ι.	ια.	ιβ.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{3}{e}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\left(\dfrac{e}{2}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα Ox.

γ. Οι αριθμοί, α και $e^{\alpha}-1$, με $\alpha\neq 0$ είναι ομόσημοι.

δ. Ισχύει $e^{x^2}>1$, για κάθε $x\neq 0$.

ε. Ισχύει $\dfrac{e^x-1}{x}>0$, για κάθε $x\neq 0$.

στ. Ισχύει $e^{-|x|}<1$, για κάθε $x\neq 0$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=5^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

β. $f(x)=2^x$, $g(x)=2^x+1$ και $h(x)=2^x-1$

γ. $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-1}$ και $h(x)=2^{x+1}$

δ. $f(x)=3^x$ και $g(x)=3^{x+2}-1$

ε. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και $g(x)=2^{1-x}+1$

5. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=3^{|x|}$ **β.** $f(x)=3^{-|x|}$

6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$, $h(x)=-e^x$ και $f(x)=-e^{-x}$

7. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=-1+e^x$ **β.** $f(x)=-1+e^{x-1}$ **γ.** $f(x)=1-e^{x-1}$

δ. $f(x)=-1+e^{-x}$ **ε.** $f(x)=-1+e^{1-x}$ **στ.** $f(x)=1-e^{-x}$

8. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$ **β.** $f(x)=\begin{cases}-e^x, & x\le 0\\ -\dfrac{1}{x+1}, & x>0\end{cases}$

9. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\le 0\\ \eta\mu x, & x>0\end{cases}$ **β.** $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$

Β. Ιδιότητες εκθετικών συναρτήσεων

10. Να βρείτε την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο:

α. $A(3, 8)$ **β.** $B(-3, 8)$

11. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η συνάρτηση:

α. $f(x)=(|\lambda|-1)^x$, ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

β. $f(x)=(3\lambda^2-2\lambda)^x$, είναι εκθετική με βάση το $3\lambda^2-2\lambda$

γ. $f(x)=(\lambda^3-7\lambda+7)^x$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

δ. $f(x)=\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}\right)^x$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(3\lambda-2)^x$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η συνάρτηση f :

α. έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$

β. είναι εκθετική με βάση το $3\lambda-2$

γ. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{1-5\alpha}{\alpha+1}\right)^x$. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η συνάρτηση f :

α. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

β. είναι εκθετική με βάση το $\dfrac{1-5\alpha}{\alpha+1}$

γ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

α. $f^2(x)-g^2(x)=1$ **β.** $g(2x)=2f(x)\cdot g(x)$

γ. $f(2x)=f^2(x)+g^2(x)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση f είναι περιττή.

β. $f(x)=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$.

Να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

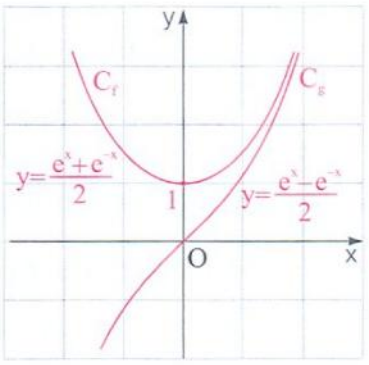
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Να δείξετε ότι $f(x)-f(-x)=x$, για κάθε $x\neq 0$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



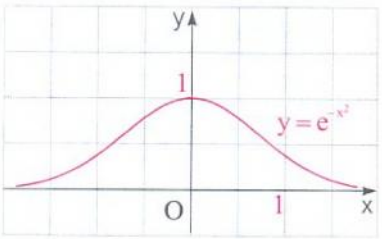
α. Με τη βοήθεια των C_f και C_g, να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας αυτών, να βρείτε τα ακρότατα (αν υπάρχουν) και να εξετάσετε, αν είναι άρτιες ή περιττές οι f, g.

β. Να δείξετε αλγεβρικά ότι:

i. Η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g είναι περιττή.

ii. Η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το 1.

19. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{-x^2}$.



α. Με τη βοήθεια της C_f να γράψετε:

i. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

ii. Τη μονοτονία της συνάρτησης f.

iii. Τα ακρότατα της συνάρτησης f.

β. Τα παραπάνω συμπεράσματα να τα επιβεβαιώσετε αλγεβρικά.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+e^x-1$.

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f.

γ. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης f.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\frac{1}{x}-\sqrt{x}-e^{-1}$.

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f.

γ. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης f.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+x-3$.

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την:

i. εξίσωση $e^{x-2}=3-x$

ii. ανίσωση $e^{x-2}>3-x$

iii. εξίσωση $e^{x^2-2}+x^2=3$

iv. ανίσωση $f(e^{3x-2}+3x-1)<0$

v. ανίσωση $e^{x^2-2}-e^{3x-2}<3x-x^2$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-1$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 2.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $5^x+12^x=13^x$.

24. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+4^x=5^x$.

Ασκησεις για Λυση

Α. Εκθετικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3^x = 9$ β. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$ γ. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$

δ. $2^{-x} = \frac{1}{64}$ ε. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$ στ. $e^x - \frac{1}{e} = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $49^x = 7$ β. $4^{2x} = 32$

γ. $4^x = \frac{1}{8}$ δ. $9^{2x+1} = 27$

ε. $\sqrt{2} = 2 \cdot 2^x$ στ. $3 \cdot 9^x = \sqrt[3]{9}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^x + 1 = 0$ β. $\frac{e^x}{3} + 1 = 0$

γ. $13^{x^2-4x} - 1 = 0$ δ. $1 - e^{|x|-2} = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^{x+1} + 8 \cdot 2^{x-2} = 16$ β. $9 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+2} = 36$

γ. $2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 10$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ β. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

γ. $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$ δ. $3 \cdot 2^{4x} - 5 \cdot 4^x = 2$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^{x+2} + 3 = 2^{-x}$ β. $2^{1-x} - 2^{1+x} = 3$

γ. $3^{x+2} + 3^{1-x} = 28$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ β. $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$

γ. $e^{3x} + 5e^{2x} = 6e^x$ δ. $e^{2x} + 3 = 4 \cdot e^{-2x}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3^{\sqrt{x}} + 3^{4-\sqrt{x}} = 18$ β. $2^{2+\sqrt{x}} - 2^{4-\sqrt{x}} = 12$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3^x + \sqrt{3^{x+2}} - 4 = 0$ β. $e^x - \sqrt{e^{x+2}} = \sqrt{e^x} - e$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ β. $3^x - 3^{x-2} = 2^{2x} - 2^{2x-1}$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $16^x - 8^x - 2^{x+2} + 4 = 0$ β. $3^{3x} - 3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 0$

γ. $10^{2x} - 4 \cdot 5^{2x} - 2^{2x} + 4 = 0$ δ. $6^x - 9 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x - 18$

12. Να λύσετε την εξίσωση $8^x + 2^{x+1} \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 125^x = 0$.

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $9^{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 9^{\sigma\upsilon\nu 2x} = 4$ β. $2^{\sigma\upsilon\nu 2x} + 4^{\eta\mu^2 x} = 3$

14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - 1}$ β. $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} + e^x - 2}$

Β. Εκθετικές ανισώσεις

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $2^x < 8$ β. $3^{x^2} - 9 > 0$ γ. $e^x \leq 1$

δ. $e^{3x+2} + 1 < 0$ ε. $e^x + 1 > 0$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3} < 8$ β. $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x \geq \dfrac{\pi^2}{9}$ γ. $\left(\dfrac{2}{e}\right)^{|x|} < \dfrac{16}{e^4}$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $4^x - 32 \cdot 2^x > 0$ β. $e^{2x} - e \cdot e^x < 0$ γ. $e^{x^2} \leq \dfrac{1}{e^x}$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $4^x - 9\cdot 2^x + 8 < 0$

β. $9^x - 4\cdot 3^x + 3 > 0$

γ. $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 < 0$

δ. $e^{2x} - (1+e)e^x + e < 0$

ε. $e^{2x} + e^x - 2 > 0$

στ. $e^{2x} - (e-2)e^x - 2e < 0$

19. Να λύσετε την ανίσωση $81^x + 2\cdot 27^x - 3^{x+1} < 0$.

20. Να λύσετε την ανίσωση $3\cdot 8^x - 3\cdot 12^x + 2\cdot 18^x > 2\cdot 27^x$.

21. Να λύσετε την ανίσωση $2^{1+2\eta\mu^2 x} + 2^{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x} \le 4$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\frac{e^x - 1}{e^x + 2} > 0$

β. $\frac{2^x + 3}{2^x + 1} \le 2$

γ. $\frac{e^x - e}{e^x - 1} > 0$

δ. $\frac{3\cdot 2^x - 1}{2\cdot 4^x} > 1$

ε. $\frac{6 - 3^x}{3^x - 1} > \frac{3^x}{2}$

23. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

β. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$

γ. $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$

δ. $f(x) = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x}$

ε. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}}$

στ. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - e}{e^x - 1}}$

24. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων:

α. $f(x) = e^{2x} - 1$

β. $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x}$

γ. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - e}$

δ. $f(x) = \frac{x - 1}{e^x - 1}$

Γ. Εκθετικά συστήματα

25. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3^{2x-y} = 27 \\ 5^{5x-4y} = 1 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+2y} = 1024 \\ 5^{x-3y-1} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} e^{4x} e^y = \dfrac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$

26. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^{y+1} = 152 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$

27. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 9 \\ (3^x)^y = \dfrac{1}{27} \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} e^{x+1} \cdot e^{y-1} = 1 \\ e^x : e^y = e^2 \end{cases}$

28. Να βρείτε του αριθμούς $\alpha = e^{2x} - \lambda^2$, $\beta = e^x - \lambda$ και $\gamma = e^{3x} - 3\lambda^2$, ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να έχουν άθροισμα 3.

Δ. Προβλήματα

29. Αν ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα 16 γραμμάρια,

α. να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού,

β. να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 40 χρόνια,

γ. να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει 2 γραμμάρια.

30. Η αξία Q(t) (σε χιλιάδες) ενός μηχανήματος, μετά t χρόνια από την κυκλοφορία του στην αγορά, δίνεται από τη συνάρτηση $Q(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$.
Αν τη στιγμή της κυκλοφορίας του η αξία του είναι 32.000 € και μετά από 6 μήνες είναι 16.000 €, να βρείτε:

α. την αξία του μηχανήματος μετά από 2 χρόνια,

β. μετά από πόσα χρόνια η αξία του θα είναι 8.000 €,

γ. πόσα χρόνια το πολύ η αξία του δεν θα είναι μικρότερη από 4.000 €.