ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

α. Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, όπου $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση το α.

β. $\ln\theta = x \Leftrightarrow \theta = \ldots\ldots$ **γ.** $\log\theta = x \Leftrightarrow \theta = \ldots\ldots$ **δ.** $\log 10 = \ldots\ldots$

ε. $\ln e = \ldots\ldots$ **στ.** $\ln 1 = \ldots\ldots$ **ζ.** $\ln e^{\alpha} = \ldots\ldots$

η. $e^{\ln\theta} = \ldots\ldots$ **θ.** $10^{\log\theta} = \ldots\ldots$ **ι.** $e^{x\ln\alpha} = \ldots\ldots$

ια. $\ln\theta_1 + \ln\theta_2 = \ldots\ldots\ldots$, $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $0<\alpha\neq 1$

ιβ. $\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \ldots\ldots\ldots$, $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $0<\alpha\neq 1$ **ιγ.** $\log_{\beta}\theta = \dfrac{\ln\theta}{\ldots\ldots}$

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha^x = \theta$, όπου $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α.

β. Ισχύει $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_{\alpha}\theta$, όπου $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$.

γ. Αν $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $0<\alpha,\beta\neq 1$, τότε ισχύει:

i. $\log_{\alpha}(\theta_1+\theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$ **ii.** $\log_{\alpha}\theta_1 - \log_{\alpha}\theta_2 = \dfrac{\log_{\alpha}\theta_1}{\log_{\alpha}\theta_2}$

iii. $\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \dfrac{1}{\kappa}\log_{\alpha}\theta$ **iv.** $\log_{\alpha}(\theta_1\cdot\theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$

v. $\log_{\alpha}\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha}\theta_1 - \log_{\alpha}\theta_2$ **vi.** $\dfrac{1}{\nu}\log_{\alpha}\theta = \log_{\alpha}\sqrt[\nu]{\theta}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

vii. $\log_{\beta}\theta = \dfrac{\log_{\alpha}\theta}{\log_{\alpha}\beta}$

α.	β.	γ.						
		i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.	vii.

3. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Ισχύει ότι $\ln\theta = x \Leftrightarrow \theta = e^x$

β. Ισχύει ότι $\log x = y \Leftrightarrow y = 10^x$

γ. Αν $\ln\theta \neq x$, τότε $\theta \neq e^x$

δ. $\ln e = e$

ε. $\log 10^{\alpha} = \alpha$

στ. $e^{\ln\theta} = \theta$

ζ. $\ln 1 = 1$

η. Αν $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$, τότε ισχύει:

i. $\ln(\theta_1 + \theta_2) = \ln\theta_1 \cdot \ln\theta_2$

ii. $\dfrac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2} = \ln(\theta_1 - \theta_2)$

iii. $\ln\theta^{\kappa} = \kappa\ln\theta, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

θ. $\log\theta = \dfrac{\ln\theta}{\ln 10}$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.			θ.
							i.	ii.	iii.	

4. **Να αντιστοιχίσετε τις λογαριθμικές παραστάσεις της στήλης Α με τα αναπτύγματά τους στη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\ln(xy^2), \quad x > 0, y \neq 0$	1. $\ln\lvert x\rvert$
Β. $\ln(exy), \quad x > 0, y > 0$	2. $\ln x + 2\ln\lvert y\rvert$
Γ. $\ln\dfrac{x}{e^3}, \quad x > 0$	3. $\ln x - 3$
Δ. $\dfrac{1}{2}\ln x^2, \quad x \neq 0$	4. $1 + \ln x + \ln y$

Α.	
Β.	
Γ.	
Δ.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Ορισμός λογάριθμου

5. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α. $\log x = 2$ β. $\ln x = 3$ γ. $\log x = -2$

δ. $\ln x = -3$ ε. $\log x = \frac{3}{2}$ στ. $\ln x = -\frac{2}{3}$

6. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

α. $\log_2 8$ β. $\log_3 81$ γ. $\log_2 \frac{1}{2}$

δ. $\log_3 \frac{1}{9}$ ε. $\log_7 \sqrt{7}$ στ. $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$

7. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

α. $\log_{\frac{1}{2}} 8$ β. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ γ. $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$

δ. $\log_{\sqrt{2}} 2$ ε. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ στ. $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5}$

8. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

α. $\log 100$ β. $\log \frac{1}{1000}$ γ. $\log 0{,}1$

δ. $\log \sqrt{10}$ ε. $\log 0{,}001$ στ. $\log 10\sqrt{10}$

9. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

α. $\ln e^2$ β. $\ln \frac{1}{e}$ γ. $\ln \sqrt{e}$

δ. $\ln e\sqrt{e}$ ε. $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ στ. $\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{e}$

10. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $3^{\log_3 5}$ β. $10^{\log 3}$ γ. $e^{\ln 5}$

Β. Ιδιότητες λογαρίθμων

11. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = \ln 1 + 2\ln e - 3\ln\frac{1}{e^2}$ **β.** $B = \ln e^2 - e^{\ln 3} + 2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\log 5 + \log 20$ **β.** $\log 3 - \log 30$

γ. $2\log 2 + \log 25$ **δ.** $2\log\sqrt{2} + \log 5$

ε. $\log(3\sqrt{5} - \sqrt{35}) + \log(3\sqrt{5} + \sqrt{35})$ **στ.** $2\log(1+\sqrt{2}) + \log(3 - 2\sqrt{2})$

13. Να αποδείξετε ότι:

α. $\log 4 + \log 5 - \log 2 = 1$ **β.** $\ln 4 - \ln 12 + \ln 3 = 0$

γ. $2\log 3 + 3\log 2 - 2\log 6 = \log 2$ **δ.** $\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{3}\ln 64 + \ln 4 = \ln 3$

ε. $\dfrac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \dfrac{3}{2}$

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $e^{\ln 5 - 3\ln 2}$ **β.** $10^{4\log\sqrt{2} - \log 3}$

γ. $(\sqrt{e})^{\ln 3 + 2\ln\sqrt{e}}$ **δ.** $\left(\frac{1}{e}\right)^{1+\ln 5}$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\log_3 2 \cdot \log_2 3$ **β.** $\log e \cdot \ln 10$

γ. $\log_2 9 \cdot \log_3 8$ **δ.** $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$

ε. $\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 5$

16. Αν $\ln x = 2$, $\ln y = 3$ και $\ln z = 5$, να υπολογίσετε τους φυσικούς λογάριθμους:

α. $\ln\frac{xy}{z}$ **β.** $\ln\frac{xz}{y^3}$ **γ.** $\ln\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

Γ. Γενικές

17. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2=7\alpha\beta$.

Να δείξετε ότι ο αριθμός $\ln\dfrac{\alpha+\beta}{3}$ είναι αριθμητικός μέσος των $\ln\alpha$ και $\ln\beta$.

18. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^3+\beta^3=\alpha\beta(\alpha+\beta)$, να δείξετε ότι:

$$\ln\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}$$

19. Αν ισχύει $\dfrac{\ln\alpha}{\beta-\gamma}=\dfrac{\ln\beta}{\gamma-\alpha}=\dfrac{\ln\gamma}{\alpha-\beta}$, να δείξετε ότι:

α. $\alpha\beta\gamma=1$ **β.** $\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=0$ **γ.** $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}=1$

20. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ, για τους οποίους ισχύει:

$$\begin{cases}\ln\alpha+\ln\beta=0\\ \ln\beta+\ln\gamma=1\\ \ln\gamma+\ln\alpha=3\end{cases}$$

21. Αν $A=\ln\varepsilon\varphi1^\circ\cdot\ln\varepsilon\varphi2^\circ\cdots\ln\varepsilon\varphi89^\circ$ και $B=\ln\varepsilon\varphi1^\circ+\ln\varepsilon\varphi2^\circ+\cdots+\ln\varepsilon\varphi89^\circ$, να δείξετε ότι $A=B$.

22. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο ο $1^{ος}$ όρος είναι $\ln\alpha$ και ο $2^{ος}$ είναι $\ln\beta$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

23. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\ln\alpha, \ln\beta, \ln\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

24. Έστω η ακολουθία $\alpha_\nu=\ln2^\nu$.

α. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Να δείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι:

$$S_\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\ln2$$

25. Να βρείτε το θετικό αριθμό x, για τον οποίο ισχύει:

$$\ln x+\ln x^4+\ln x^7+\cdots+\ln x^{100}=3434$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι το σύνολο $A =$ ..... .

β. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\log x$ είναι το σύνολο $f(A) =$ ..... .

γ. Ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι ....

δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο .....

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ έχει ασύμπτωτη ....

στ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα του x ..... .

ζ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα του x ..... .

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

β. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy'.

δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x στο διάστημα του $x\in(0,1)$.

ε. Αν $x_1,\ x_2>0$, τότε $\ln x_1=\ln x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

στ. Αν $x_1,\ x_2>0$, τότε $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.

3. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Αν $0 < x < 1$, τότε $\ln x < 0$.

β. Αν $x > 10$, τότε $\log x > \ln e$.

γ. Αν $0 < x < e$, τότε $\ln x > \log 10$.

δ. Αν $x > 1$, τότε $\ln x < 0$.

ε. Αν $x > e$, τότε $\ln x < 1$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.

4. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Αν $x > 1$, τότε $\ln x > 0$.

β. Αν $0 < x \neq 1$, οι αριθμοί $x - 1$ και $\ln x$ είναι ομόσημοι.

γ. Για κάθε $x > 1$, είναι $x - 1 + \ln x > 0$.

δ. Για κάθε $0 < x \neq 1$, είναι $\dfrac{\ln x}{x - 1} > 0$.

α.	β.	γ.	δ.

5. **Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τις λύσεις της στη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\ln x = 0$	1. $x = \sqrt{e}$
Β. $\ln x = -1$	2. $x = e^2$
Γ. $\ln x = 1$	3. $x = 1$
Δ. $\ln x = 2$	4. $x = e$
Ε. $\ln x = \dfrac{1}{2}$	5. $x = \dfrac{1}{e}$

Α.	
Β.	
Γ.	
Δ.	
Ε.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Γραφικές παραστάσεις λογαριθμικών συναρτήσεων

6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2+\ln x$ β. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln(x-1)$

γ. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln(x+1)$

7. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α. $f(x)=-\ln x$ και $g(x)=-\ln(x+1)$

β. $f(x)=-\ln x$ και $g(x)=1-\ln(x-1)$

γ. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=1+\ln\dfrac{1}{x+1}$

8. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=1+\ln(x+1)$ β. $f(x)=1-\ln(x-2)$

9. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln x^4$ β. $f(x)=\ln(x^2+2x+1)$

γ. $f(x)=\sqrt{(\ln x)^2}$ δ. $f(x)=|\ln(x+1)|$

10. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-1, & x\in(0,\,1]\\ \ln x, & x\in(1,\,+\infty)\end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 1\\ -\ln x, & x>1\end{cases}$

γ. $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$ δ. $f(x)=\begin{cases}1-e^{x-1}, & x\ge 1\\ \ln(1-x), & x<1\end{cases}$

11. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α. $f(x)=1+\log x$ β. $f(x)=\log(x-1)$ γ. $f(x)=2+\log\dfrac{1}{x+1}$

12. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x)=\ln x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=2\ln x$$

Στη συνέχεια να εξετάσετε, αν οι C_f και C_g ταυτίζονται.

Β. Ιδιότητες λογαριθμικών συναρτήσεων

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\ln(3x-2)$ **β.** $f(x)=\ln(x-2)-\ln(3-x)$

γ. $f(x)=\ln|x|$ **δ.** $f(x)=\ln(3-|x-1|)$

ε. $f(x)=\ln(x^2-1)$ **στ.** $f(x)=\ln(x^2-x+1)$

14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\ln(2-\eta\mu x)$ **β.** $f(x)=\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)$

γ. $f(x)=\ln(7x-6-x^3)$ **δ.** $f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$

15. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\ln(e^x-1)$ **β.** $f(x)=\ln(e-e^x)$

γ. $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{x}$ **δ.** $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{x-2}$

ε. $f(x)=\ln(e^{2x}+e^x-2)$

16. Να βρείτε τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\kappa\ln x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο:

α. $A\left(\frac{1}{2},3\right)$ **β.** $B(e,2)$ **γ.** $\Gamma\left(\frac{1}{e},-1\right)$ **δ.** $\Delta\left(\sqrt[3]{e},-2\right)$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$. Να δείξετε ότι $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, $x>0$.

18. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x\cdot\ln\frac{7-x}{7+x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

19. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+x\ln\frac{x+2}{x-2}$ είναι άρτια.

20. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\dfrac{x}{1+e^{x}}$ είναι άρτια.

21. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ είναι περιττή.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}+\ln x-1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f .

γ. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης f .

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\ln x}+\ln(2x-4)-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\ln 2+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$, $x\in A$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

γ. Αν $\alpha>\beta>1$, να δείξετε ότι $\alpha^{\alpha}>\beta^{\beta}$.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

γ. Αν α , $\beta > 0$ και $\ln\frac{\alpha}{\beta} = \beta - \alpha$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x < 1 - x^2$.

ε. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\frac{x^2+2}{2x^2+1} = x^2 - 1$.

28. Έστω $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα με $\varphi(1) = -2$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \varphi(x)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $3\ln x = 2 + \varphi(x^3)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\frac{x^2+3}{2x^2+2} = \frac{x^2-1}{2(x^2+3)(x^2+1)}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + \ln x - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι $f(x^4+1) \geq f(2x^2)$, για κάθε $x \neq 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2(x^2+1)^5 + \ln(x^2+1) - 1\right) = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Λογαριθμικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\log 3^x = x$ **β.** $\ln 2^{x-1} = x + 2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln x = 0$ **β.** $\ln x - 1 = 0$ **γ.** $\ln x + 1 = 0$

δ. $2\ln x - 1 = 0$ **ε.** $3\ln x + 2 = 0$ **στ.** $\frac{1 - 2\ln x}{2} - 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(x-2) - 1 = 0$ **β.** $2\ln(3x-1) + 1 = 0$

γ. $\ln(x^2+1) = 0$ **δ.** $\ln x^2 - 1 = 0$

ε. $\ln(x^2-1) - 1 = 0$ **στ.** $\ln(1-x^2) + 1 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\log x - 1 = 0$ **β.** $\log(x+2) = 0$ **γ.** $\log(2x-1) + 1 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln x = \ln(2-x)$ **β.** $\ln(x^2 - 3x) - \ln(5+x) = 0$

γ. $\log(3-x^2) - \log(x^2-1) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 4$ **β.** $\ln(x+1) - \ln(3-x) = \ln 2$

γ. $\log x + \log(x-1) = \log(x+2) - \log 2$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$ **β.** $\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$

γ. $\ln x^2 - \ln(2x-2) = \ln 2e - 1$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2\log x - \log(x+6) = \log 3$

β. $\log(x-9) + 2\log\sqrt{2x-1} = 2$

γ. $2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

δ. $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2\log^2 x - 3\log x = 0$

β. $\ln^2 x - 1 = 0$

γ. $2\log^2 x + 5\log x - 3 = 0$

δ. $(2\ln x - 1)\ln x = 1$

ε. $\frac{8\ln x}{\ln x - 3} = \ln x + 3$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln\frac{x}{3} = \frac{\ln x}{3}$

β. $\ln x = \ln^2 x$

γ. $\ln x^2 = \ln^2 x$

δ. $\ln\sqrt{x} = \ln^2 x$

11. Να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} y = 3x \\ 3\log y = \log 3 + \log x \end{cases}$

β. $\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x\ln 5 + y\ln 2 = \ln 20 \end{cases}$

12. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + \ln y = 1 \\ y = e^x + 1 - e \end{cases}$

13. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \ln\frac{x}{e} - 1 = 0 \\ \ln x - \ln^2 y = -1 \end{cases}$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^x = 3^x$

β. $2^{x-1} = 5^x$

γ. $9^x - 3^x - 2 = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2^x = 3$

β. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} = 26$

γ. $5^{x+2} - 3^x = 5^x + 2 \cdot 3^{x-1}$

δ. $3^{2x+1} + 4 = 13 \cdot 3^x$

ε. $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1}$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $4^x \cdot 3^x + 2 \cdot 12^x = 9 \cdot 6^x$

β. $\ln(e^x + 9 - e) = 1 - x + \ln 9$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(e^{2x} + 2) = x$

β. $\ln(e^{2x} + 2) = x + \ln 3$

γ. $x + \log(1 + 2^x) = x\log 5 + \log 6$

18. Να λύσετε την εξίσωση $5^{\ln x} - 3^{\ln x - 1} = 3^{\ln x + 1} - 5^{\ln x - 1}$.

19. Να λύσετε την εξίσωση $2^{\ln x} + 2^{2 - \ln x} = 5$.

20. **α.** Να δείξετε ότι $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0$.

21. **α.** Να δείξετε ότι $x^{\ln y} = y^{\ln x}$, με $x, y > 0$.

β. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^{\ln y} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^{\ln x} = e$

β. $x^{2\ln x} = \dfrac{x^5}{e^2}$

γ. $x^{\ln^2 x} = \dfrac{x^3}{e^2}$

δ. $x^{\ln x} = e^3 \cdot x^2$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\sqrt{x^{\ln\sqrt{x}}} = e$

β. $\dfrac{x^{\ln x}}{x^2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{e}$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(\eta\mu x) = 0$, $x \in (0, \pi)$

β. $\eta\mu 3^x = 1$

25. Να λύσετε την εξίσωση $3^{2\eta\mu x + 1} - 5 \cdot 6^{\eta\mu x} + 4^{\eta\mu x + \frac{1}{2}} = 0$.

Β. Λογαριθμικές ανισώσεις

26. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\log(2x-1) > \log(3-x)$ **β.** $\ln x^2 > \ln(x+2)$

27. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $2^x < 5$ **β.** $3^{x-1} > 2^{x+1}$ **γ.** $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\frac{e^x-1}{e^x+1} > \frac{1}{2}$ **β.** $\frac{2e^x-3}{e^x-1} > 1$ **γ.** $\frac{e^{2x}-3}{e^x-1} < 3$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$ **β.** $\ln^2 x > \ln x$ **γ.** $\ln^2 x \geq 1$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\frac{2\ln x+1}{\ln x+1} > 1$ **β.** $\frac{\ln x-1}{\ln x} \leq \frac{1}{2}$

31. Να λύσετε την εξίσωση $3\sqrt{\ln x} + 2\ln\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x + \ln(e^x - 1) = \ln 20$ **β.** $\ln(e^x - 3) + x = 2\ln 2$

33. Να λύσετε την ανίσωση $2^{1+\ln x^2} - 2^{\ln x} < 1$.

34. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{1}{2\ln x - 1}$ **β.** $f(x) = \frac{1}{\ln\ln x}$

γ. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$ **δ.** $f(x) = \ln(2e^x - 3)$

ε. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **στ.** $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

35. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων:

α. $f(x)=3e^x-1$ β. $f(x)=5-2e^x$ γ. $f(x)=e^{x-1}-2$

36. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων:

α. $f(x)=3\ln x-1$ β. $f(x)=2-\ln(2x)$ γ. $f(x)=2\ln(1-x)-3$

37. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{1-2e^x}{x+1}$ β. $f(x)=\dfrac{3\ln x-1}{1-x}$ γ. $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x-3}$

Γ. Γενικές

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(2e^x-1)$. Να βρείτε:

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

γ. Τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

39. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(5-3^x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

40. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\ln(x-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

41. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2(1+\ln\theta)x+5-\ln^2\theta$, $\theta>0$.

Να βρείτε τις τιμές του θ, ώστε:

α. Η C_f να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

β. Η C_f να βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Η συνάρτηση f να έχει ελάχιστη τιμή το 4 και στη συνέχεια, να βρείτε που την παρουσιάζει.

42. Αν η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = \ln(\eta\mu x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\omega = \ln 2$ και $\alpha_5 = \ln 8$, να βρείτε το x.

43. Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και οι αριθμοί: $\ln(2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $\ln\eta\mu\theta$, $-\ln 6$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το θ.

44. Αν οι αριθμοί $\ln 2$, $\ln(2^x - 1)$, $\ln(2^x + 3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x.

45. Αν οι αριθμοί $\ln 7$, $\ln\sqrt{3\cdot 4^x + 2\cdot 25^x}$, $x\ln 10$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x.

Δ. Προβλήματα

46. Το πλήθος των βακτηριδίων που εμφανίζονται σε μία καλλιέργεια μετά από t ημέρες δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\frac{t\ln 3}{5}}$$

όπου Q_0 είναι το αρχικό πλήθος των βακτηριδίων.
Πόσος χρόνος θα περάσει, ώστε το πλήθος των βακτηριδίων να εννεαπλασιασθεί;

47. Αν η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού είναι

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t\ln 2}{10}}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες, να βρείτε την ημιζωή του ραδιενεργού υλικού.

48. Έστω ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού είναι $N(t) = N_0 \cdot e^{-ct}$, όπου t ο χρόνος σε ημέρες.
Αν μετά από 4 ημέρες το ραδιενεργό υλικό που έχει μείνει αδιάσπαστο είναι 5 γραμμάρια και μετά από 6 ημέρες από την αρχή της διάσπασης έχουν μείνει 2,5 γραμμάρια:

α. Να βρείτε τα N_0 και c.

β. Να δείξετε ότι $N(t) = 20\cdot 2^{-\frac{t}{2}}$.

γ. Να βρείτε την ημιζωή του ραδιενεργού υλικού.

49. Οι πωλήσεις $Q(t)$ (σε εκατοντάδες μονάδες) ενός προϊόντος σε διάστημα t χρόνων, μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνονται από τη συνάρτηση:

$$Q(t) = \alpha(1 - e^{\beta t})$$

Αν οι πωλήσεις κατά το πρώτο εξάμηνο ανήλθαν σε 54 μονάδες και κατά το πρώτο έτος ανήλθαν σε 72 μονάδες,

α. να βρείτε τα α και β

β. για $\alpha = \frac{81}{100}$ και $\beta = -2\ln 3$, να βρείτε σε πόσα έτη από την εισαγωγή του στην αγορά οι πωλήσεις θα είναι 80 μονάδες

γ. να βρείτε πόσα έτη χρειάζονται τουλάχιστον, ώστε οι πωλήσεις να είναι τουλάχιστον 60 μονάδες.

50. Ο πληθυσμός $\Pi(t)$ μιας πόλης (σε χιλιάδες) t χρόνια μετά την τελευταία απογραφή δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\Pi(t) = \alpha + \beta(1 - e^{ct}), \quad t \geq 0, \quad \beta, c \neq 0$$

Στην τελευταία απογραφή ο πληθυσμός της πόλης ήταν 100.000. Μετά 2 χρόνια ήταν 116 χιλιάδες και μετά από άλλα 2 χρόνια ήταν 124 χιλιάδες.

α. Να βρείτε τα α, β και c.

β. Για $\alpha = 100$, $\beta = 32$ και $c = -\frac{1}{2}\ln 2$, να βρείτε τον πληθυσμό της πόλης στην επόμενη απογραφή.

γ. Να βρείτε σε πόσα τουλάχιστον χρόνια ο πληθυσμός δεν θα είναι λιγότερος από 120.000.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\ln 2, 3)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του α.

β. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 2$.

δ. Να δείξετε ότι $f(x)=1+\dfrac{2}{e^x-1}$ και στη συνέχεια, να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ε. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{e^{x^4}+1}{e^{x^4}-1}<\dfrac{e^{x^2+2}+1}{e^{x^2+2}-1}$.

52. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(3-2\ln\alpha)^x$.

α. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Για $\alpha=e\sqrt[4]{e}$, να λύσετε:

i. την ανίσωση $2f(2x)-f(x)<1$

ii. την εξίσωση $f(3x)+\dfrac{f(x)}{9^x}=\dfrac{2}{27^x}$.

53. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln\dfrac{5+x}{5-x}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 4\ln\sqrt{2})$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του α.

β. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\sqrt{x}=\big(\alpha+f(0)\big)\sqrt{\ln x}$.

δ. Αν $\beta,\gamma>0$ και $\beta\neq\gamma$, να δείξετε ότι

$$\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma>4e^{f(-3)}\beta^\gamma\cdot\gamma^\beta$$