

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

- α. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, όταν:

....., για κάθε $x \in A$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση, ενώ το $f(x_0)$

ή απλώς της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με

- β. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό), όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

- γ. Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται αυτής.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- α. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

- β. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει και μέγιστο και ελάχιστο.

- γ. Υπάρχει συνάρτηση η οποία δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο;

- δ. Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης, λέγονται ολικά ακρότατα αυτής.

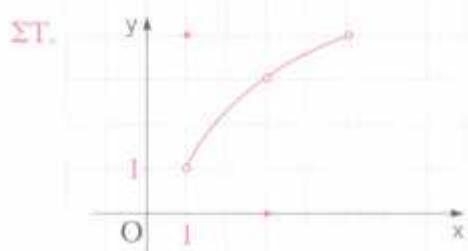
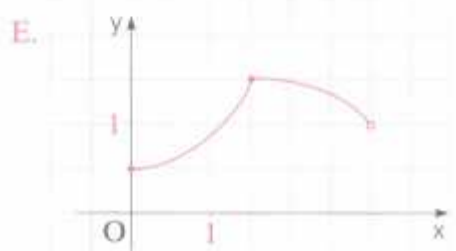
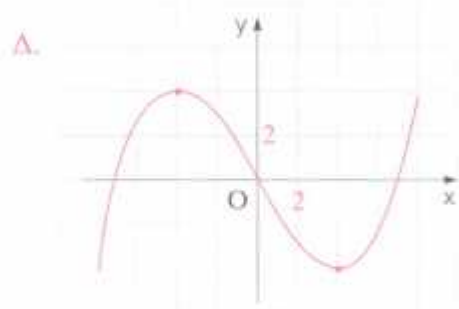
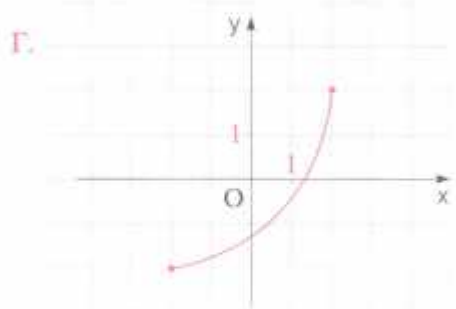
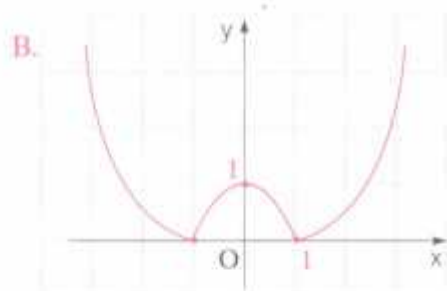
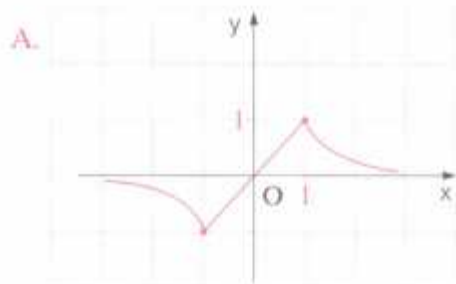
α.	β.	γ.	δ.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- α. Αν η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης είναι το 1, τότε η f δεν έχει καμία ρίζα.
- β. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης είναι -2 , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει με τον άξονα $x'x$ κανένα κοινό σημείο.
- γ. Αν η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι το 2, τότε η εξίσωση $f(x)=1$ είναι αδύνατη.
- δ. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , τότε η $-f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
- ε. Έστω $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(A)=[\kappa, \lambda)$. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός κ .

α.	β.	γ.	δ.	ε.

4. Να βρείτε, (αν υπάρχουν) τα ολικά ακρότατα και τις θέσεις των ακρότατων των παρακάτω συναρτήσεων:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Προσδιορισμός ακρότατων

5. Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 2$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = -x^2 + 2x - 2$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$, έχει ελάχιστη τιμή το $\frac{1}{2}$ και μετά, να βρείτε τη θέση ελαχίστου.

6. α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ παρουσιάζει μέγιστο, για $x = 2$ και ελάχιστο, για $x = -2$.

β. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = \frac{3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 4}$.

γ. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $h(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4}$.

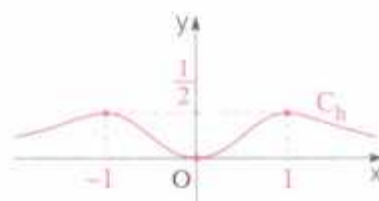
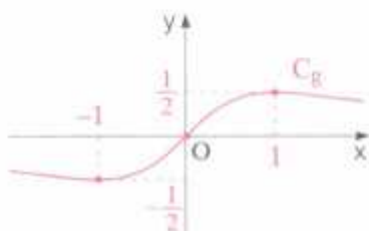
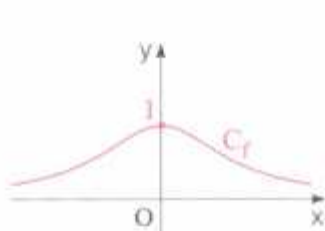
7. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

και

$$h(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

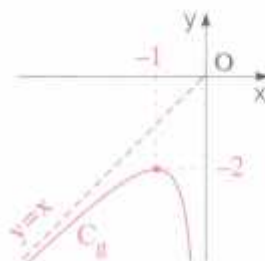
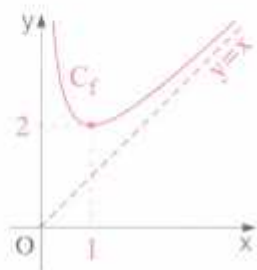


α. Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων f , g , h καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

8. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x < 0$$



- α. Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων f και g καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.
- β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

9. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

a. $f(x) = 3|x| - 2$

B. $f(x) = 3 - 2|x|$

7. $f(x) = 2|x - 1| - 3$

6. $f(x) = 5 - |2x - 3|$

10. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

a. $f(x) = 3x^2 - 1$

B. $f(x) = 5 - 2x^4$

γ. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

6. $f(x) = 1 - 3(x - 2)^4$

ε. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

στ. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

11. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

β. $f(x) = -x^2 + 5x - 2$

12. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

a. $f(x) = \sqrt{x} - 3$

B. $f(x) = 2 - 3\sqrt{x-1}$

7. $f(x) = \frac{3}{1 + \sqrt{x}}$

B. Γενικές

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ και ισχύει:

$$3f(x) + 1 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 1. Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση

$$g(x) = x^2 + x - 1 + f(a), \quad x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-3, 1)$, $B(1, 2)$ και ισχύει:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |f(x) - 1| + |f(x) - 2|$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) - 5 = 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

- α. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της συνάρτησης f .
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.
- δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^2(x) = f(x) + 2$$

- ε. Αν ισχύει $2f(\alpha) + 3f(\beta) = -5$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

- στ. Αν $\gamma, \delta \neq 2$, να δείξετε ότι:

$$f(\gamma) + f(\delta) + f(\gamma) \cdot f(\delta) + 1 > 0$$