

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

.....

β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a > 0$ είναι γνησίως στο \mathbb{R} .

δ. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

β. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

δ. Αν Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f και υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

α.	β.	γ.	δ.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

i. Αν $a \leq \beta$, τότε $f(a) \leq f(\beta)$.

ii. $f(a) < f(a+1)$

iii. $f(x) < f(2x)$, για κάθε $x > 0$

iv. $f(x^2) > f(x^3)$, για κάθε $x > 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

A. Μονοτονία βασικών συναρτήσεων

8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = 2x - 5$

β. $f(x) = -5x + 2$

γ. $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$

δ. $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \begin{cases} 3x & , \text{ αν } x \leq 0 \\ -x^2 & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}$

β. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$

γ. $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{ αν } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}$

10. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = |x|$

β. $f(x) = |2x - 1|$

γ. $f(x) = |x^2 - 4|$

δ. $f(x) = |x^2 - x|$

11. α. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η συνάρτηση:

i. $f(x) = (\lambda^2 - 1)x - 3$ είναι γνησίως φθίνουσα

ii. $f(x) = (2\lambda - 3)x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (\lambda^2 - \lambda + 1)x^2$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Εύρεση είδους μονοτονίας μιας συνάρτησης

12. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

α. $f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ και στη συνέχεια, να δείξετε ότι

$$f(2015) < f(2016)$$

β. $f(x) = -3x^5 - 2x + 1$ και στη συνέχεια, να συγκρίνετε τις τιμές $f(13)$ και $f(14)$.

13. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ β. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ γ. $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x}$

14. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-2}$ β. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$.

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β. Αν $a > 1$, να δείξετε ότι $3a^4 - \frac{2}{a} + \sqrt{a} > 2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - \sqrt{4-3x}$.

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β. Να δείξετε ότι ισχύει $x^3 < \sqrt{4-3x}$, για κάθε $x < 1$.

17. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ β. $f(x) = \frac{2}{x-1} - x^3$

18. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ β. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$

19. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ β. $f(x) = \begin{cases} x^3 + \sqrt{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^4 - \frac{1}{x-1}, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$

Γ. Απόδειξη ανισοτήτων με μονοτονία

20. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη και ισχύει:
$$f(3) < f(\pi)$$
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - Να συγκρίνεται τις τιμές $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ και $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.
21. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(-1, 5)$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - Να συγκρίνεται τις τιμές:
 - $f(a)$ και $f(a+1)$
 - $f(a)$ και $f(a^2)$, όταν $a > 1$
22. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη, έχει ρίζα το 2 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - Να δείξετε ότι $f(1) < 0$.
 - Να δείξετε ότι $f(a^2 + 9) \geq f(6a)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι $f\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 0$, για κάθε $a > 0$.
23. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των x στο 2 και τον άξονα των y στο 3.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - Να συγκρίνεται τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{3}{\pi}\right)$.
 - Να δείξετε ότι $f(1) > 0$.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - ax + f(3) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
24. Έστω f, g δύο συναρτήσεις, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού τους. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:
- $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .
 - $\varphi(x) = \frac{2}{x} + 1 - 3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ και στη συνέχεια ότι:
 - $\varphi(a) < 0$, για $a > 1$
 - $\varphi(\beta) < \varphi(2\beta)$ για $\beta < 0$

Α. Ρίζες - Πίνακας προσήμων, γνησίως μονότονης συνάρτησης

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 12$.
- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - β. Να δείξετε ότι ο αριθμός 2 είναι ρίζα της f .
 - γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - δ. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τιμών της συνάρτησης f .
 - ε. Να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 2x > 12$.
26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 6x - 7$.
- α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 - γ. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τιμών της συνάρτησης f .
 - δ. Να λύσετε την ανίσωση $x^5 > 7 - 6x$.
27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{\alpha}{x} - 5$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.
- α. Να βρείτε την τιμή του α .
 - β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - γ. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 - δ. Να λύσετε την ανίσωση $3\sqrt{x} > \frac{4}{x} + 5$.
 - ε. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $A \cap B \neq \emptyset$, να αποδείξετε ότι:
 - i. $f(P(A)) \leq f(P(A \cup B))$
 - ii. $f(P(B)) \geq f(P(A \cap B))$
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3\sqrt{x} + 2$.
- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - β. Να λύσετε την ανίσωση $3x^2\sqrt{x} - 2x^2 > 1$, στο $(0, +\infty)$.
 - γ. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $A \cap B \neq \emptyset$, να δείξετε ότι:
$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq f(P(B)) + f(P(A \cup B))$$