ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με .... ή ...... ένα διάνυσμα το οποίο:

είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν ...... και ....του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και έχει μέτρο ....

ii. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ...... ή .....

iii. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε ....

iv. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε ....

v. Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής ...., όπου ....

vi. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με ......, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} =$ ...., ...

vii. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε $\vec{OM} = \dfrac{\text{..............}}{\text{.......}}$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Αν $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $|\lambda\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\alpha}|$.

ii. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

iii. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

iv. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$, τότε $\lambda = \mu$.

v. Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

vi. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε $\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA} - \vec{OB}}{2}$.

i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, με $\lambda > 0$.

ii. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$.

iii. Αν $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

iv. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$.

v. Αν $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi$.

vi. Αν $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 0$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

vii. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}_0 = \dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι μοναδιαίο στην κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.	vii.

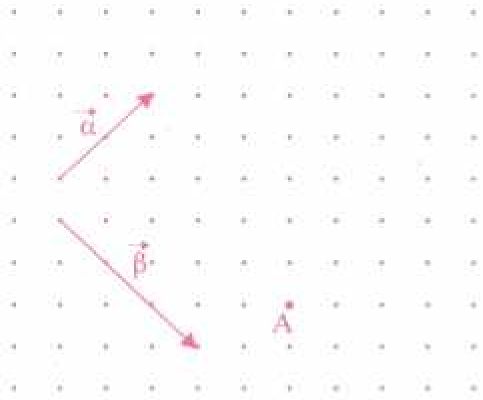
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το σημείο Α.

Να βρείτε τα σημεία Β, Γ, Δ, όταν:

i. $\vec{AB} = 2\vec{\alpha}$

ii. $\vec{A\Gamma} = -\dfrac{1}{3}\vec{\beta}$

iii. $\vec{A\Delta} = \dfrac{3}{2}\vec{\alpha} - \dfrac{2}{3}\vec{\beta}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

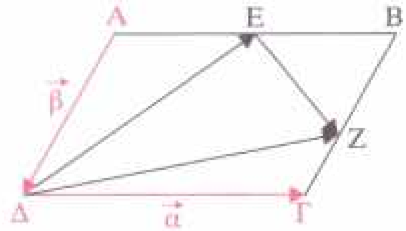
Α1. Πράξεις διανυσμάτων

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

i. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε $2(\vec{x}-\vec{\alpha})-\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{\beta})=2\vec{\alpha}$

ii. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, ώστε $\begin{cases}\vec{x}-2\vec{y}=\vec{\alpha}\\ \vec{x}-\vec{y}=\vec{\beta}\end{cases}$

6. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα και είναι $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$. Αν το Ε είναι μέσον του ΑΒ και ισχύει $\vec{BZ}=\frac{2}{3}\vec{B\Gamma}$, να εκφράσετε συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$, $\vec{\Delta Z}$, $\vec{EZ}$.



7. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να δείξετε ότι:

$$5\vec{AB}-3\vec{A\Gamma}+2\vec{\Delta A}=3\vec{\Gamma\Delta}-5\vec{B\Delta}$$

8. Αν ισχύει $\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{M\Gamma}=\vec{NA}+2\vec{NB}+3\vec{N\Gamma}$, να δείξετε ότι τα σημεία Μ, Ν ταυτίζονται.

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν ισχύει

$$5\vec{B\Gamma}+2\vec{BA}=6\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma\Delta}$$

να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Α2. Σταθερό διάνυσμα - Εύρεση σημείου

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι, για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{v}=7\vec{MA}-5\vec{MB}-2\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ισχύει $\kappa+\lambda+\mu=0$, να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ, το διάνυσμα $\vec{u}=\kappa\vec{MA}+\lambda\vec{MB}+\mu\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

12. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε σημείο Μ, τέτοιο, ώστε

$$3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{0}$$

B1. Παράλληλα διανύσματα

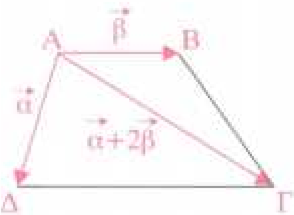
13. Αν ισχύει $2\vec{B\Gamma}+5\vec{\Delta B}=2\vec{BA}+\vec{\Gamma A}$, να δείξετε ότι: $\vec{A\Gamma}\uparrow\uparrow\vec{B\Delta}$.

14. Αν ισχύουν ότι $\vec{AB}=5\vec{AE}+2\vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Gamma}=2\vec{AE}+5\vec{A\Delta}$, να δείξετε ότι:

$$\vec{B\Gamma}\uparrow\downarrow\vec{E\Delta}.$$

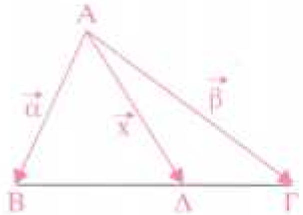
15. Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{\alpha}=2\vec{v}-3\vec{u}$, $\vec{\beta}=5\vec{v}-2\vec{u}$, να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{v}$ και να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

16. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.



17. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\frac{4}{3}\vec{\gamma}$ και $\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{\alpha}-\frac{3}{4}\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

18. Στο διπλανό σχήμα είναι $2(B\Delta)=3(\Gamma\Delta)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ, τέτοιο, ώστε $\vec{K\Gamma}=2\vec{BK}$. Να δείξετε ότι:

i. το Κ είναι μεταξύ των Β και Γ

ii. $\vec{AK}=\vec{AB}+\dfrac{\vec{A\Delta}}{3}$

iii. το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Delta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{AB}$.

20. Αν τα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β, Γ, Δ είναι αντίστοιχα, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $4\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\vec{AB}\uparrow\uparrow\vec{\Gamma\Delta}$.

21. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Μ εξωτερικό του ΑΒ, έτσι, ώστε $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{3}{2}$. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β

B2. Συνευθειακά σημεία

22. Αν για τα σημεία Μ, Α, Β, Γ ισχύει: $3\vec{MA}+4\vec{MB}-7\vec{M\Gamma}=\vec{0}$,

i. να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά,

ii. να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ.

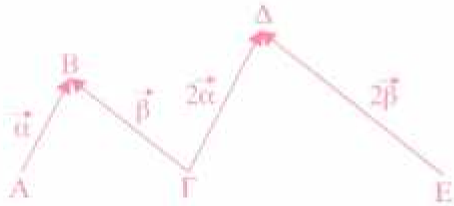
23. Αν ισχύει $(\kappa+2)\vec{MA}+3\vec{MB}=(\kappa+5)\vec{M\Gamma}$, να αποδείξετε ότι:

i. τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά,

ii. να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε το Γ να είναι μεταξύ των Α και Β.

24. Αν ισχύει: $2\vec{A\Lambda}+3\vec{B\Lambda}+2\vec{MB}=\vec{AK}+\vec{AM}+\vec{BK}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

25. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

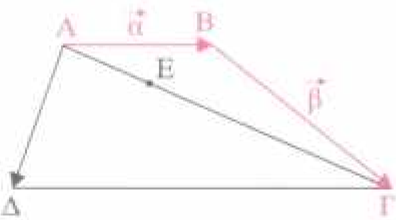


26. Αν τα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β, Γ είναι

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\ ,\quad 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}\ ,\quad 4\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}$$

αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

27. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Αν $(\Gamma\Delta)=3(AB)$, $E\Gamma=3EA$, $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$,



i. να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα

$$\vec{A\Gamma},\ \vec{AE},\ \vec{BE},\ \vec{B\Delta}$$

ii. να δείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

Γ. Διανυσματική ακτίνα μέσου

28. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν το σημείο Ο είναι μέσον του ΚΛ, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = 4\vec{MO}$$

29. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma} + \vec{P\Delta} = \vec{0}$$

30. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = 2\vec{K\Lambda}$.

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $5\vec{A\Delta} - 3\vec{A\Gamma} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 3\vec{EM}$ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AM}$

ii. τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσον Ζ της διαμέσου του ΑΜ. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $2\vec{\alpha}$ τα διανύσματα θέσεως των σημείων Α, Β, Γ αντίστοιχα και για τα σημεία Δ, Ε ισχύει: $\vec{A\Delta} = 3\vec{\Delta B}$, $\vec{AE} = \frac{3}{5}\vec{E\Gamma}$,

i. να βρείτε τα διανύσματα θέσεως των σημείων Μ, Ζ, Δ και Ε

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά.

Δ. Εύρεση αριθμού από διανυσματική ισότητα

33. Αν τα σημεία Β, Γ δεν συμπίπτουν και ισχύει $\vec{A\Delta} = 3\vec{B\Gamma}$, να βρείτε την τιμή του x, ώστε $\vec{A\Gamma} + x\vec{B\Delta} = (x-1)\vec{\Gamma\Delta}$.

34. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε την τιμή του λ, αν τα διανύσματα

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} + (\lambda+1)\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{u} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

είναι ομόρροπα.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\vec{BM} = 2\vec{M\Gamma}$,

i. να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = \dfrac{\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}}{3}$

ii. να βρείτε τα κ, λ, ώστε $\kappa\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} = 3\vec{AM} + \vec{B\Gamma}$.

36. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{AB}$. Να βρείτε τα κ, λ, ώστε να ισχύει:

$$\kappa\vec{A\Gamma} + \lambda\vec{B\Delta} = 5\vec{AB} + \vec{A\Delta}$$

37. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ , τέτοιο, ώστε $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του.

i. Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}, \vec{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii. Αν $\vec{AM} = \lambda\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BM} = \mu\vec{B\Delta}$, να βρείτε τα λ, μ.

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, τέτοια, ώστε το Δ μέσον του ΑΒ και $\vec{AE} = \dfrac{\vec{A\Gamma}}{3}$.

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{BE}$, $\vec{\Delta E}$ συναρτήσει των $\vec{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AE} = \vec{\beta}$.

ii. Έστω Ρ το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ. Αν $\vec{\Delta P} = \lambda\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{EP} = \mu\vec{EB}$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ και το λόγο $\dfrac{|\vec{\Delta P}|}{|\vec{P\Gamma}|}$.

39. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ ενός επιπέδου με διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $3\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}$ αντίστοιχα, όπου τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου τομής Κ των ευθειών ΑΓ και ΒΔ.

Γεωμετρικοί τόποι

40. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MA}+\vec{MB}|=|\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}|.$$

41. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MB}+\vec{A\Delta}|>|\vec{\Gamma A}+\vec{MB}-\vec{\Gamma B}|$$

42. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MB}-\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Gamma B}+\vec{\Delta A}|=3$$

43. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MA}+\vec{M\Gamma}+2\vec{M\Delta}|=|\vec{MA}+\vec{M\Gamma}-2\vec{M\Delta}|$$

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$ είναι μοναδιαίο, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$|\vec{\Gamma B}-\vec{\Gamma M}|+|\vec{MB}-\vec{\Gamma B}|=1$$

45. Δίνονται τα μοναδιαία και κάθετα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$|\vec{MB}|+|\vec{M\Gamma}|=\sqrt{2}$$

46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MB}+\vec{\Gamma\Delta}|-|\vec{M\Gamma}-\vec{A\Delta}|=|\vec{\Delta B}-\vec{\Delta A}|$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε.

i. Να δείξετε ότι $5\vec{AB} - 4\vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma} = 4\vec{\Delta B} - \vec{B\Gamma}$.

ii. Να βρείτε σημείο Ν, ώστε να ισχύει:

$$2\vec{AN} - 5\vec{A\Delta} = 2\vec{\Delta B} + \vec{NB}$$

και στη συνέχεια, να το προσδιορίσετε γραφικά.

iii. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ.

iv. Αν ισχύει: $3\vec{\Gamma\Delta} + 3\vec{EB} + 2\vec{\Gamma E} = 3\vec{EA} - 2\vec{E\Delta}$, να δείξετε ότι $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$.

v. Αν ισχύει: $3\vec{AB} - 2\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} = \vec{0}$, να δείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και να βρείτε τη σχετική θέση των Β, Γ, Δ.

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Έστω σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ, ώστε $\Delta B = 2\Delta\Gamma$ και Μ το μέσον του ΑΔ.

i. Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$, $\vec{BM}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii. Αν, για ένα σημείο Ε ισχύει: $\vec{AE} = 2\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AB} + \vec{\Gamma E} = x\,\vec{B\Gamma}$, να βρείτε το x.

iii. Αν $|\vec{B\Gamma}| = 2$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που ικανοποιούν τη σχέση $|\vec{MB} - \vec{AM} + \vec{A\Gamma}| = |\vec{M\Gamma} + 2\vec{B\Gamma} - \vec{MB}|$.

49. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, που οι κορυφές του Α, Β, Γ έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $3\vec{\alpha}$ αντίστοιχα. Έστω τα σημεία Ε, Ζ, έτσι, ώστε το Ε να είναι το μέσον του ΒΓ και για το Ζ να ισχύει $\vec{Z\Delta} = 2\vec{BZ}$.

i. Να βρείτε τα διανύσματα θέσεως των σημείων Δ, Ε, Ζ.

ii. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Ζ, Ε είναι συνευθειακά.

iii. Έστω ότι η ΑΕ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ρ.

α. Να βρείτε τα λ και μ, ώστε $\vec{AP} = \lambda\vec{AZ}$ και $\vec{P\Delta} = \mu\vec{\Gamma\Delta}$

β. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως του σημείου Ρ.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Α2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OM}$.

β. Αν $\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$.

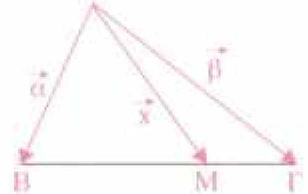
γ. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\lambda||\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = -|\lambda| \cdot \vec{\beta}$.

δ. Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$, τότε $\lambda = \mu$.

ε. Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ομόρροπο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα έχουμε $(ΒΜ) = 3(ΓΜ)$.



Β1. Να δείξετε ότι $\vec{ΒΜ} = \frac{3}{4}\vec{ΒΓ}$

Β2. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Β3. Αν $\vec{x} = \frac{\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{4}$ και για τα σημεία Δ, Ε ισχύουν $\vec{ΑΔ} = \frac{1}{2}\vec{x}$ και $\vec{ΑΕ} = \frac{3}{7}\vec{ΑΓ}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για τα διακεκριμένα σημεία Α, Β, Γ ισχύει:

$$4\vec{OA} + \vec{\Gamma A} = 3\vec{OB} + \vec{O\Gamma}$$

Γ1. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία ε.

Γ2. Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ πάνω στην ευθεία ε.

Γ3. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να ισχύει $\vec{AM} = x\vec{AB}$ και το Μ να είναι μέσον του ΑΓ.

ΘΕΜΑ Δ

Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ ενός επιπέδου έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $2\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}$ αντιστοίχως, όπου τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά. Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσεως του σημείου τομής Ρ των ευθειών ΑΓ και ΒΔ.

Δ1. Να δείξετε ότι $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$.

Δ2. Να βρείτε τα λ και μ, ώστε $\vec{AP} = \lambda\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BP} = \mu\vec{B\Delta}$.

Δ3. Να δείξετε ότι $\vec{r} = \frac{2}{3}\vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.