Ασκησεισ για Λυση

1. **Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

Α. i. Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο .... διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με .... τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$............

ii. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$..... και αντιστρόφως.

iii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$..... και αντιστρόφως.

iv. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$..... και αντιστρόφως.

v. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με .... , λέγεται .... του $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}^2=$ ....

vi. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i},\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύουν $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=$..... και $\vec{i}^2=\vec{j}^2=$.....

Β. i. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$, $\vec{\beta}(x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$..................

ii. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το .... των .... των .... συντεταγμένων τους.

iii. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=$............

iv. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\nparallel y'y$, τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=$....

Γ. i. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\text{............}}{\text{............}}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\text{....................}}{\text{....................}}$.

iii. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\ldots\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

A. i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

ii. Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

iii. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

iv. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

v. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

i.	ii.	iii.	iv.	v.

B. i. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1y_1+x_2y_2$.

ii. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

iii. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\not\parallel y'y$, τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=1$.

i.	ii.	iii.

Γ. i. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1y_1-x_2y_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}}$$

iii. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{v}}\vec{\alpha}$

i.	ii.	iii.

3. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

i. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, τότε $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$

ii. $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

iii. Αν $\vec{\alpha}^2=0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$

iv. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\leq\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

v. Αν $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

i.	ii.	iii.	iv.	v.

4. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω παραστάσεις με την ένδειξη Διάνυσμα (Δ) ή Αριθμός (Α).**

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ iii. $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$

iv. $\vec{\alpha}^2$ v. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

i.	ii.	iii.	iv.	v.

5. **Έστω θ η γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε τις σχέσεις της στήλης Α με τις ισοδύναμές τους στη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$	1. θ, οξεία
Β. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$	2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$
Γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$	3. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$
Δ. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$	4. $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$
Ε. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$	5. $\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
	6. θ, αμβλεία

Α.	Β.	Γ.	Δ.	Ε.

6. **Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία, να αντιστοιχίσετε τις σχέσεις της στήλης Α με τις ισοδύναμές τους στη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$	1. $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$
Β. $\vec{\alpha}^2$	2. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$
Γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$	3. $\|\vec{\alpha}\|^2$
Δ. $\|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\|=1$	4. $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$
	5. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Α.	Β.	Γ.	Δ.

7. **Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

i. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \ldots.$

ii. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \ldots.$

iii. $\vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \ldots.. \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α1. Υπολογισμός εσωτερικού γινομένου

8. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

iii. $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

9. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$, να υπολογίσετε

i. το $|\vec{\beta}|$

ii. το εσωτερικό γινόμενο $(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$

10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $\alpha = 2$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$

ii. $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$

iii. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma B}$

11. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. με $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^{2014} + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})^{2013}$$

A2. Μέτρο διανύσματος

12. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{3\pi}{4}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

13. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 30^\circ$ και $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 2$, να βρείτε:

i. το $|\vec{\beta}|$ **ii.** το $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

14. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 1$, $(\alpha, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 60^\circ$ και $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\gamma}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

15. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 135^\circ$.

A3. Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$, $\vec{\beta} = (-2, 0)$ και $\vec{\gamma} = (0, 4)$.
Να βρείτε:

i. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii. το διάνυσμα $\vec{v} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

iii. την τιμή της παράστασης $A = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})$

18. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 3)$, $\vec{\beta} = (1, 2)$ και $\vec{\gamma} = (0, -2)$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i. $A = |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| + |\vec{\alpha}|$ **ii.** $B = |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta}|$ **iii.** $\Gamma = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

19. Αν $\vec{\alpha} = (5, 2)$ και $\vec{\beta} = (7, -3)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = 38$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{x} = 30$.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda, -1)$, $\vec{\beta}=(1, \mu)$ και $\vec{\gamma}=(\lambda-\mu, -2)$. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-3$, να βρείτε:

i. τις τιμές των λ, μ

ii. τον αριθμό x, ώστε: $(\vec{\alpha}+x\cdot\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})=-1$

21. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2, 3)$ και $\vec{\gamma}=(-1, 2)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$$

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1, -2)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(0, 1)$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$

ii. $(\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma})\vec{A\Gamma}$, όπου Μ μέσον του ΒΓ.

iii. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Delta}$, όπου για το σημείο Δ ισχύει $\vec{B\Delta}=2\vec{\Delta\Gamma}$.

Α4. Κάθετα διανύσματα

23. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x-2, 2)$ και $\vec{\beta}=(3, x-7)$.

i. Να δείξετε ότι $x=4$

ii. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε $(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του επιπέδου. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{6}$ και $(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

25. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι κάθετο στο $\vec{v}=(1, 2)$ και έχει μέτρο $\sqrt{5}$.

26. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1, 3)$, $\vec{\beta}=(3, -1)$ και $\vec{\gamma}=(-1, 0)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, ώστε να είναι $|\vec{v}|=10$ και $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$.

27. *Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(7, -4)$. Να βρείτε σημείο Μ στον άξονα $x'x$, ώστε $A\hat{M}B=90^\circ$.*

Α5. Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων

28. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, όταν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$ και ισχύει:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$ **ii.** $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\sqrt{7}$

29. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $\vec{\alpha}=(1\,,3)$ και $\vec{\beta}=(2\,,1)$

ii. $\vec{\alpha}=(3\,,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},\,-1)$

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, να βρείτε:

i. το μέτρο του διανύσματος $|\vec{\gamma}|$

ii. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{u}$.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $A(2,0)$, $B(5,1)$, $\Gamma(1,3)$.

i. Να βρείτε το είδος της γωνίας $\hat{A}$

ii. Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου, να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}})$.

33. Αν $\vec{\alpha}=(1,-1)$, $\vec{\beta}=(1,1)$, $2\vec{v}+\vec{u}=\vec{\beta}$ και $\vec{v}+2\vec{u}=\vec{\alpha}$, να βρείτε:

i. τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ **ii.** το $\text{συν}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

34. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της υποτείνουσας ΒΓ, τέτοιο, ώστε ΔΒ = 2ΔΓ. Αν $\vec{AB}=\vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma}=\vec{\gamma}$ και Μ το μέσον της πλευράς ΑΓ, να δείξετε ότι:

i. $\vec{A\Delta}=\dfrac{\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{3}$ και $\vec{BM}=\dfrac{-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}$

ii. $\vec{A\Delta}\perp\vec{BM}$

B1. Προβολή διανύσματος

35. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$, όταν:

i. $\vec{\alpha}=(2,\ 3)$ και $\vec{\beta}=(-1,\ 4)$

ii. $|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$

36. **i.** Αν $|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}=(-1,\ 2)$, $\vec{\beta}=(4,\ 3)$ και $\vec{v}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

37. Αν $|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, να βρείτε το λ, ώστε:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta})=-2\vec{\alpha}$$

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, − 1), Β(−1, 4), Γ(3, − 2) και ΑΜ διάμεσος. Να βρείτε την προβολή του $\vec{AM}$ πάνω στο $\vec{B\Gamma}$.

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ) = 3, ΑΓ = 4, $B\hat{A}\Gamma=120^\circ$, και ΑΜ διάμεσος. Να υπολογίσετε την $\text{προβ}_{\vec{A\Gamma}}\vec{AM}$.

40. Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=(3,2)$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=(2,-3)$,

i. να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

ii. να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

B2. Ανάλυση διανύσματος σε συνιστώσες

41. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και $\vec{\beta}=(5,10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

42. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,\ 1)$ και $\vec{\beta}=(1,\ 3)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, ώστε $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}/\!/\vec{\beta}$.

Γ1. Κανόνας του παραλληλογράμμου

43. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ να βρείτε το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

44. Αν για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ ισχύουν:

$$1\le|\vec{v}|\le 2\ ,\ 1\le|\vec{u}|\le 2 \text{ και } |\vec{v}-\vec{u}|=\sqrt{3}$$

να δείξετε ότι $1\le|\vec{v}+\vec{u}|\le\sqrt{13}$.

45. Αν για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{\alpha}$ ισχύουν:

$$|\vec{v}-\vec{\alpha}|=|\vec{u}-\vec{\alpha}|=3\ ,\ |\vec{v}-\vec{u}|=6 \text{ και } |\vec{\alpha}|=2\ ,$$

να δείξετε ότι $|\vec{v}+\vec{u}|=4$.

46. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ με $|\overrightarrow{ΟΑ}|=|\overrightarrow{ΟΒ}|=|\overrightarrow{ΟΓ}|=1$ και $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Γ2. Σχέση $\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}+\lambda\vec{\gamma}=\vec{0}$

47. Έστω $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$ και $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$. Να βρείτε:

i. το $|\vec{\gamma}|$ **ii.** την τιμή της παράστασης $A=2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

48. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\gamma}|=3$.
Αν ισχύει $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1) , να υπολογίσετε την παράσταση

$$A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-3\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$$

49. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{2}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$ **ii.** $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$

50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{ΑΒ}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΒΓ}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΓΑ}=\vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{4}$,

να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$ **ii.** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$

51. i. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=2$, να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γ3. Ομόρροπα - Αντίρροπα διανύσματα

52. i. Αν $\vec{\alpha}^2=5\cdot(2\vec{\alpha}-5\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

ii. Αν $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}$, να δείξετε ότι $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$

iii. Αν $\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2=\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\beta}-\vec{\alpha})$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}=\vec{0}$

Γ4. Γενικά

53. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε:

$$\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x}).$$

54. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=120^\circ$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

ii. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε: $\vec{x}//(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha}\perp(\vec{\beta}-\vec{x})$.

55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-3,\ 4)$ και $\vec{\beta}=(-2,\ -3)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x},\vec{y}$, ώστε να είναι: $\vec{\alpha}=2\vec{x}-3\vec{y}$, $\vec{x}\perp\vec{y}$, $\vec{y}//\vec{\beta}$.

56. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ -7)$ και $\vec{\beta}=(-3,\ \lambda)$. Αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=135^\circ$, να βρείτε το λ.

57. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{v}-\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\ ,\quad \vec{v}+2\vec{u}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\pi}{3}$$

i. να γράψετε τα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

ii. να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

58. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB}=(-1,\ 0)$, $\vec{A\Gamma}=(2,\ 1)$ και ΑΔ το ύψος του. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$.

59. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\beta} + 4\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha} = \vec{0}, \quad 2\vec{\alpha} + \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta} = \vec{0}$$

i. Να δείξετε ότι: $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}\,|\vec{\alpha}|$.

ii. Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Δ. Γεωμετρικοί τόποι

60. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M που ικανοποιούν τη σχέση

$$\vec{ON} = \frac{2\vec{OM}}{\vec{OM}^2}$$

και το σημείο N βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

61. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M που ικανοποιούν στη σχέση

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = 0$$

όπου M' το συμμετρικό του σημείου M ως προς την ευθεία $y = x$ και O η αρχή των αξόνων.

62. Δίνονται τα σταθερά σημεία A και B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|3\vec{MA} - \vec{MB}| = \sqrt{9\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2}$$

63. Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B με $|\vec{AB}| = 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $\vec{MA} \cdot \vec{M\Gamma} = 5 + \vec{MA} \cdot \vec{B\Gamma}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

64. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{v}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{2\pi}{3}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$

i. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$.

ii. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}})$.

iii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}=-\vec{\alpha}+\dfrac{3}{2}\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

iv. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στο διάνυσμα $\vec{w}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

65. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$, $\vec{\beta}=(0,3)$ και $\vec{\gamma}=(-1,2)$. Να βρείτε:

i. τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

ii. το διάνυσμα $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, που είναι κάθετο στο $\vec{\gamma}$ και έχει μέτρο $\sqrt{5}$

iii. την τιμή του λ, ώστε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\lambda\vec{\alpha}+\beta)=2\vec{\alpha}$.

66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A=(1,1)$, $B=(3,-1)$ και $\Gamma=(1,-2)$ και Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ.

i. Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.

ii. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$ πάνω στο $\overrightarrow{B\Gamma}$.

iii. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ σε δύο μη μηδενικές κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{A\Delta}$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Α2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0$.

β. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$.

γ. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\nparallel y'y$, τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=1$.

δ. Αν θ η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

ε. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq 0$, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{v}}\,\vec{\alpha}$$

ΘΕΜΑ Β

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=120^\circ$. Έστω επιπλέον τα διανύσματα $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

Β1. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Β2. τα μέτρα $|\vec{v}|$, $|\vec{u}|$ των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{u}$

Β3. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v}\cdot\vec{u}$

Β4. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{u}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 1)$ και $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

Γ2. Να βρείτε τα λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{v}$, να είναι κάθετο στο $\vec{\gamma} = (1, 1)$ και να έχει μέτρο $7\sqrt{2}$.

Γ3. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (2, 5)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3, -1)$, $B(7, 2)$, $\Gamma(-\frac{5}{7}, -2)$ και ΑΜ η διάμεσός του.

Δ1. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{AM}$.

Δ2. Να βρείτε σημείο Ρ στον άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο ΑΡΒ να είναι ορθογώνιο στο Ρ.

Δ3. Να βρείτε την προβολή του $\vec{AM}$ στο $\vec{AB}$.