

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

**α.**  $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$  ή  $x = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

**β.**  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$  ή  $x = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

**γ.**  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

**δ.**  $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

**2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

**α.** Η εξίσωση  $\eta\mu x = a$ , με  $a > 1$  είναι αδύνατη.

**β.**  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2κπ + \theta, κ \in \mathbb{Z}$

**γ.**  $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2κπ + \theta$  ή  $x = 2κπ - \theta, κ \in \mathbb{Z}$

**δ.**  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = 2κπ + \theta, κ \in \mathbb{Z}$

<b>α.</b>	
<b>β.</b>	
<b>γ.</b>	
<b>δ.</b>	

**3.** Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις που βρίσκονται στη στήλη Α με τις ρίζες τους που βρίσκονται στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Ρίζες
<b>Α.</b> $\sigma\upsilon\nu x = 0$	<b>1.</b> $x = κπ, κ \in \mathbb{Z}$
<b>Β.</b> $\eta\mu x = 0$	<b>2.</b> $x = κπ + \frac{\pi}{2}, κ \in \mathbb{Z}$
<b>Γ.</b> $\sigma\upsilon\nu x = 1$	<b>3.</b> $x = 2κπ, κ \in \mathbb{Z}$
<b>Δ.</b> $\eta\mu x = -1$	<b>4.</b> $x = 2κπ + \pi, κ \in \mathbb{Z}$
<b>Ε.</b> $\sigma\upsilon\nu x = -1$	<b>5.</b> $x = 2κπ - \frac{\pi}{2}, κ \in \mathbb{Z}$
<b>ΣΤ.</b> $\eta\mu x = 1$	<b>6.</b> $x = 2κπ + \frac{\pi}{2}, κ \in \mathbb{Z}$

<b>Α.</b>	
<b>Β.</b>	
<b>Γ.</b>	
<b>Δ.</b>	
<b>Ε.</b>	
<b>ΣΤ.</b>	

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

### Α. Βασικές εξισώσεις

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{5}$

β.  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7}$

γ.  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{18}$

δ.  $\sigma\phi x = \sigma\phi \frac{2\pi}{11}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

β.  $2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$

γ.  $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

δ.  $\sigma\phi x - 1 = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\sqrt{2}\eta\mu x - 1 = 0$

β.  $2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

γ.  $\sqrt{3}\epsilon\phi x - 1 = 0$

δ.  $\sqrt{2}\sigma\phi x - \sqrt{6} = 0$

### Β. Εξισώσεις της μορφής $\eta\mu x = -a$ , $\sigma\upsilon\nu x = -a$ , $\epsilon\phi x = -a$ , $a > 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{7}$

β.  $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{9}$

γ.  $\epsilon\phi x + \epsilon\phi \frac{\pi}{10} = 0$

δ.  $\sigma\phi x + \sigma\phi \frac{\pi}{8} = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

β.  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ.  $\epsilon\phi x = -1$

δ.  $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$

### Γ. Οι εξισώσεις $\eta\mu x = 0$ , $\sigma\upsilon\nu x = 0$ , $\eta\mu x = \pm 1$ , $\sigma\upsilon\nu x = \pm 1$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$

β.  $\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x - 1) = 0$

γ.  $\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x + 1) = 0$

δ.  $\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$



10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$

γ.  $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

β.  $2\epsilon\phi x \cdot \eta\mu x = \epsilon\phi x$

δ.  $\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

γ.  $1 + \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\phi x = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$

β.  $\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x - \sqrt{3} = \sqrt{3}\eta\mu x - \epsilon\phi x$

δ.  $(1 - 2\eta\mu x)^2 + 2\eta\mu x - 1 = 0$

Δ. Εξισώσεις της μορφής:

$a \cdot \eta\mu^2 x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu x + \gamma = 0$  ,  $a \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \beta \cdot \eta\mu x + \gamma = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu^2 x = \frac{3}{4}$

γ.  $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$

β.  $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$

δ.  $3\sigma\phi^2 x - 1 = 0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$

γ.  $\epsilon\phi^2 x - (1 - \sqrt{3})\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$

β.  $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

δ.  $3\sigma\phi^2 x - 4\sqrt{3}\sigma\phi x + 3 = 0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\sigma\upsilon\nu^2 x - 7\eta\mu^2 x + 1 = 0$

β.  $3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - 3 = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sqrt{3}\eta\mu x + 1 = 0$

γ.  $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2 = \eta\mu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x$

β.  $3(1 - \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^2 x$

δ.  $3\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2\sqrt{2}\eta\mu x$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2\eta\mu^2 x - |\eta\mu x| - 1 = 0$

γ.  $\eta\mu^4 x - 6\eta\mu^2 x + 5 = 0$

β.  $\sigma\upsilon\nu^2 x - 4|\sigma\upsilon\nu x| + 3 = 0$

δ.  $4\sigma\upsilon\nu^4 x - 7\sigma\upsilon\nu^2 x + 3 = 0$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $8\sigma\upsilon\nu^3x + 1 = 0$

β.  $9\epsilon\phi^4x - 1 = 0$

Ε. Εξισώσεις της μορφής  $\eta\mu(ax+\beta)=\gamma$ ,  $\epsilon\phi(ax+\beta)=\gamma$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2\eta\mu 3x - 1 = 0$

β.  $2\sigma\upsilon\nu\pi x + \sqrt{3} = 0$

γ.  $\epsilon\phi(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$

δ.  $\sqrt{3}\sigma\phi(\pi x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu 2x = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{3})$

β.  $\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$

γ.  $\epsilon\phi(x - \frac{\pi}{3}) - \epsilon\phi(3x + \frac{\pi}{6}) = 0$

δ.  $\sigma\phi\pi x + \sigma\phi(2\pi x - \frac{\pi}{3}) = 0$

ΣΤ. Εξισώσεις της μορφής:  $\sigma\upsilon\nu A(x) = \eta\mu B(x)$ ,  $\epsilon\phi A(x) = \sigma\phi B(x)$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu x$

β.  $\sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu(x - \frac{\pi}{3})$

γ.  $\epsilon\phi 3x - \sigma\phi(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

δ.  $\sigma\phi(2x - \frac{\pi}{3}) - \epsilon\phi(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

ε.  $\eta\mu(2x - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu x$

στ.  $\epsilon\phi(3x - \frac{\pi}{3}) + \sigma\phi(x - \frac{\pi}{6}) = 0$

Ζ. Εξισώσεις της μορφής  $\eta\mu(ax) = \kappa\sigma\upsilon\nu(ax)$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

β.  $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x = 0$

γ.  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

δ.  $\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$

ε.  $\sqrt{3}\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) - \sigma\upsilon\nu(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

στ.  $\sqrt{3}\eta\mu\pi x + \sigma\upsilon\nu\pi x = 0$

## Η. Λύση εξίσωσης σε διάστημα

22. Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων που ανήκουν στο διάστημα  $\Delta$ .

α.  $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ ,  $\Delta = [0, 2\pi]$

β.  $2\eta\mu x + 1 = 0$ ,  $\Delta = (-\pi, 2\pi]$

γ.  $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$ ,  $\Delta = (0, 3\pi]$

δ.  $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$ ,  $\Delta = [-1, 3]$

## Θ. Εξισώσεις με περιορισμούς

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\sigma\phi x = 2\sigma\upsilon\nu x$

β.  $3\epsilon\phi x = \eta\mu x$

γ.  $\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x + \eta\mu x + \epsilon\phi x + 1 = 0$

δ.  $\sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$

ε.  $\epsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x$

στ.  $\eta\mu x - \frac{1}{\eta\mu x} = \sigma\phi x$

ζ.  $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \epsilon\phi x = 2$

η.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

θ.  $\epsilon\phi 2x \cdot \sigma\phi x = 1$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\sigma\upsilon\nu x(1 + \epsilon\phi^2 x) - \epsilon\phi x = \sigma\upsilon\nu x$

β.  $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\epsilon\phi x$

## Ι. Εξισώσεις και συναρτήσεις

25. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων και που την παρουσιάζουν:

α.  $f(x) = 2\eta\mu x - 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

β.  $f(x) = 1 + 3\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

γ.  $f(x) = \frac{1}{2 - \eta\mu x}$ ,  $x \in [0, \pi]$

δ.  $f(x) = \frac{1}{3 + 2\eta\mu x}$ ,  $x \in [0, \pi]$

**26.** Να βρείτε, για ποιες τιμές του  $x$ , καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.


**α.**  $f(x) = 2\eta\mu(3x - \frac{\pi}{4}), 0 \leq x \leq 2\pi$

**β.**  $g(x) = 2 + 3\sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{3}), 0 < x < 2\pi$

**γ.**  $h(x) = 5 + 2\eta\mu(2\pi x + \frac{\pi}{4}), 0 < x < 2$

**27.** Οι ετήσιες πωλήσεις ενός βιομηχανικού προϊόντος (σε εκατοντάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο  $S = 50 + 10\eta\mu\frac{\pi t}{6}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε έτη με  $t=1$  να αντιστοιχεί στο 2001 και  $0 \leq t \leq 20$ .

**α.** Να βρείτε, ποιο έτος οι πωλήσεις είναι 5.500 κομμάτια;

**β.** Να βρείτε ποιο έτος έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές; 

**28.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \epsilon\phi x$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$ .

**29.** Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\alpha - \eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}$ , διέρχεται από το σημείο  $K(\pi, -\frac{1}{2})$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -1$ .

**30.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x + \epsilon\phi x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .

**31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \cdot (\epsilon\phi x + \sigma\phi x)^2$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \epsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x$ .

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$ .

**32.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2}\sin x - 1$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**γ.** Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τιμών της  $f$ .

**δ.** Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{2}\sin x < 1$ , στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**33.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \eta \mu x$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

**β.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$  και τις παραβολές  $y = x^2$  και  $y = -x^2$ .

**γ.** Να δείξετε ότι  $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**δ.** Να δείξετε ότι  $f \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$ .

**34.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ .

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια.

**β.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τις υπερβολές  $y = \frac{1}{x}$  και  $y = -\frac{1}{x}$ .

**γ.** Να δείξετε ότι  $-\frac{1}{|x|} \leq f(x) \leq \frac{1}{|x|}$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

**35.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια.

**β.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$  και στη συνέχεια, με τις ευθείες  $y = x$  και  $y = -x$ .

**γ.** Να δείξετε ότι  $-|x| \leq f(x) \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ .

- Να βρείτε τη περίοδο της  $f$  και τη διαφορά της ελάχιστης τιμής της από τη μέγιστη τιμή της.
- Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  στο διάστημα  $[0, 6\pi]$ .
- Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$  στο  $[0, 6\pi]$ .
- Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \eta\mu\frac{x}{3} = 4$ .

37. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha\eta\mu(3\pi - \omega x) + \alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega x\right)$ .

- Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\alpha\eta\mu\omega x$ .
- Έστω επιπλέον, ότι η  $f$  έχει περίοδο  $T = \pi$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{12}, -\frac{3}{2}\right)$ .
  - Να δείξετε ότι  $f(x) = -3\eta\mu 2x$ .
  - Να βρείτε τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της συνάρτησης  $f$ .
  - Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ .
  - Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  στο διάστημα  $[0, T]$ .

38. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \alpha\epsilon\phi(21\pi + \pi\omega x) + \sigma\phi\left(\frac{13\pi}{2} - \pi\omega x\right)$ .

- Να δείξετε ότι  $f(x) = (\alpha + 1)\epsilon\phi(\pi\omega x)$ .
- Έστω επιπλέον ότι η  $f$  έχει περίοδο  $T = 2$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ .
  - Να δείξετε ότι  $f(x) = 3\epsilon\phi\frac{\pi x}{2}$ .
  - Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2016$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{\epsilon\phi^2\frac{19\pi}{3}}{\epsilon\phi\pi x}$ .



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

### ΘΕΜΑ 1

- α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i. Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}_1 = \{x / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ .
  - ii. Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = \pi$ , το  $-1$ .
  - iii. Η ευθεία  $x = \pi$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \epsilon\phi x$ .
  - iv. Ισχύει  $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$  ή  $x = 2\kappa\pi - \theta$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .
  - v. Η συνάρτηση  $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$ ,  $\rho, \omega > 0$  έχει περίοδο  $T = \frac{\omega}{2\pi}$ .
- β. Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  λέγεται περιοδική;
- γ. Να γράψετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης, που βρίσκεται στον παρακάτω πίνακα στη γραμμή  $A$  και στο διάστημα που βρίσκεται στην ίδια στήλη και στη γραμμή  $B$ .

Γραμμή A	1. $\eta\mu x$	2. $\epsilon\phi x$	3. $\sigma\upsilon\nu x$	4. $\eta\mu x$
Γραμμή B	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

### ΘΕΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu 2x$ .

- α. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .
- β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .
- γ. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
- δ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{3}{2}$ .

### ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \alpha - 1 + \beta \sin(\gamma x) \quad \text{με } \beta, \gamma > 0,$$

η οποία έχει περίοδο  $T = 4$ , μέγιστη τιμή 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M\left(\frac{16}{3}, \frac{1}{2}\right)$ .

**α.** Να δείξετε ότι  $f(x) = 2 + 3 \sin \frac{\pi x}{2}$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(2x) - f\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$ .

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 5 + 2 \eta \mu^2 \frac{\pi x}{2}$ .

**δ.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f\left(\frac{2x}{\pi}\right) - \eta \mu x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν τέμνει την ευθεία  $y = 6$ .

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \nu x} + \frac{1 + \sigma \nu x}{\eta \mu x}$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  και στη συνέχεια, να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

**β.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{2}{\eta \mu x}$ ,  $x \in A$ .

**γ.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g(x) = |f(x)|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και στη συνέχεια, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $g(x) = \eta \mu \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**δ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sigma \nu x}$  και στη συνέχεια, να βρείτε τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα  $(0, 3\pi)$ .