

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Η εξίσωση με ή λέγεται γραμμική εξίσωση και παριστάνει

β. Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ και ϵ_1, ϵ_2 οι ευθείες με εξισώσεις

τις εξισώσεις του συστήματος.

i. Αν οι ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει λύση.

ii. Αν οι ευθείες είναι, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Αν το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τότε οι ευθείες

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ λέγεται γραμμική εξίσωση.

β. Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

γ. Η εξίσωση $3x + 0y = 5$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.

δ. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει δύο ακριβώς λύσεις.

ε. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 τέμνονται, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

| | |
|----|--|
| α. | |
| β. | |
| γ. | |
| δ. | |
| ε. | |

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

Έστω (Σ) ένα γραμμικό σύστημα 2×2 .

α. Αν το σύστημα έχει δύο λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

β. Αν το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(0, 0)$, τότε οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι μηδέν.

γ. Αν οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι 0, τότε το σύστημα δεν είναι αδύνατο.

δ. Αν οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι το 0 και το ζεύγος (x_0, y_0) με $x_0 y_0 \neq 0$ είναι λύση του συστήματος, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

| | |
|----|--|
| α. | |
| β. | |
| γ. | |
| δ. | |

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Αλγεβρική επίλυση συστήματος

4. Δίνεται η εξίσωση $3x - y = 6$.
- α. Να εξετάσετε, αν τα ζεύγη $(2, -3)$, $(3, 3)$ και $(2, 3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.
- β. Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία το ζεύγος $(a - 2, 2a - 1)$ είναι λύση της εξίσωσης.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση.
5. Έστω ότι το ζεύγος $(-1, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης $(a - 1)x - y = a + 3$.
- α. Να βρείτε την τιμή του a .
- β. Να λύσετε την εξίσωση. ■
6. Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$ β. $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - y = 4 \end{cases}$ γ. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$
7. Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}$ β. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$ γ. $\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 4x - 7y = -3 \end{cases}$
8. Να λύσετε τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$ β. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ γ. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$
9. Να λύσετε τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ β. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$
10. Να λύσετε τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$ β. $\begin{cases} (x + 1)^2 + (3y - 1)^2 = x^2 + 9y^2 \\ (x - 1)^3 + 3x^2 + 5y = x^3 - 2 \end{cases}$
11. Να λύσετε τα συστήματα:
- α. $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x + 2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$ β. $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{4} \\ \frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$

B. Γραφική επίλυση συστήματος

12. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} y = 2x \\ x - y = 3 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

13. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$$

Γ. Εύρεση παραμέτρων

14. Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες το σύστημα
$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$$
 έχει λύση το ζεύγος $(3, 2)$.

15. Αν τα συστήματα:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$
 και
$$\begin{cases} \alpha x + y = 7\beta \\ 5x - \beta y = 3\alpha \end{cases}$$

έχουν κοινή λύση, να βρείτε τα α και β .

16. Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών:

$$\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x - y - 3 = 0$$

και στη συνέχεια την τιμή του λ , για την οποία η ευθεία $\varepsilon: \lambda x - y = \lambda + 3$ διέρχεται από το A .

17. Αν οι ευθείες: $\varepsilon_1: x + y = 3$, $\varepsilon_2: x - y = 1$ και $\varepsilon_3: x - ky = k + 1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε την τιμή του k .

18. Αν οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2\alpha x + \beta y = \alpha + 39$ και $\varepsilon_2: x + (\alpha - \beta)y = \beta - 2$ τέμνονται στο σημείο $A(5, 3)$, να βρείτε τα α και β .

19. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , που διέρχεται από τα σημεία $A(2, -3)$ και $B(-2, 5)$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ , που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

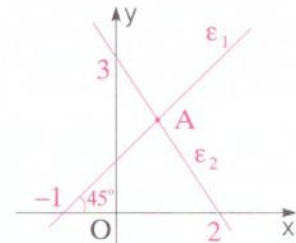
20. Έστω ότι η ευθεία $\varepsilon_1: 2x - y - \beta = 0$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 1 και η ευθεία $\varepsilon_2: y = (\alpha - 3)x - 8$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο των γωνιών xOy και $x'Oy'$.

α. Να βρείτε τα α και β .

β. Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2$, να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

21. Δύο πλοία κινούνται ευθύγραμμα, το πρώτο από το λιμάνι $A(3, 7)$ προς το λιμάνι $B(-1, -1)$ και το δεύτερο από το λιμάνι $\Gamma(2, 5)$ προς το λιμάνι $\Delta(-3, 0)$. Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους.

22. Να βρείτε το κοινό σημείο A των ευθειών που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



23. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 6y = 3$ και $\varepsilon_2: x + 3y = \alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- β.** Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α , για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;
- γ.** Για ποιες τιμές της παραμέτρου α , οι ευθείες:
 - i.** είναι παράλληλες;
 - ii.** συμπίπτουν;

Δ. Προβλήματα

24. Σ' ένα ταξίδι με αεροπλάνο, το εισιτήριο της A' θέσης κοστίζει 120 € και της B' θέσης 40 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 160 εισιτήρια συνολικής αξίας 13.200 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία;

25. Αν οι μαθητές ενός τμήματος θελήσουν να καθήσουν από ένας σε κάθε θρανίο στην αίθουσα, τότε θα μείνουν 9 όρθιοι, ενώ αν καθήσουν από δύο σε κάθε θρανίο θα μείνουν κενά 8 θρανία. Να βρείτε, πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία;

26. Να βρείτε τις ηλικίες δύο παιδιών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 6 χρόνια, ενώ μετά από 5 χρόνια η τριπλάσια ηλικία του ενός θα είναι ίση με την πενταπλάσια ηλικία του άλλου.

27. Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 6. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 7. Ποιος μπορεί να είναι ο διψήφιος αριθμός;

28. Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 Km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

- 29.** Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει από αυτή, είναι 8 sec . Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 1500 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 52 sec . Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.
- 30.** Μια ποτοποιία παρασκεύασε 500 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 36% vol , αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 48% vol και 32% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

Ε. Γενικές

- 31.** Αν η εξίσωση $(\alpha - 2\beta - 1)x = 2\alpha - \beta - 5$ έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των α και β .
- 32.** Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - (2\alpha - \beta)x + \alpha - 3\beta = 0$, να έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 1 .
- 33.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha x^3 - 1}{\beta x^2 - 2}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, \frac{7}{6})$ και $B(-2, -\frac{3}{2})$, να βρείτε τα α, β και το πεδίο ορισμού A της f .
- 34.** Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες η εξίσωση $(\alpha - 3\beta + 1)x + (3\alpha - \beta - 5)y + \beta - 3 = 0$, παριστάνει ευθεία.
- 35.** Θεωρούμε το δειγματικό χώρο Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα αυτού, για τα οποία ισχύουν:
- $$3P(B) - 2P(A') = 0 \quad \text{και} \quad P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$
- Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$.
- 36.** Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_3 + \alpha_6 = 17$ και $3\alpha_2 - \alpha_9 = -19$. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου και στη συνέχεια, το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της.