

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές

3. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

α. $|+5|$

β. $|-3|$

γ. $|0|$

δ. $|-7| + |+3| - ||-2| - 3|$

4. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

α. $|\pi - 3|$

β. $|4 - \pi|$

γ. $|\sqrt{2} - 1|$

δ. $|\sqrt{3} - \sqrt{2}|$

5. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

α. $A = |\pi - 3| + |\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{3} - 2|$

β. $B = |\pi - 4| + |\sqrt{2} - 2| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

6. Να γράψετε, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $|x^2 + 1|$

β. $|-x^2|$

γ. $|x^2 - 2x + 1|$

δ. $|10x - 25 - x^2|$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x^2 - 4x + 4| - |-x^2 - 3|$

β. $B = |10x - 25 - x^2| - |x^4 + 1|$

8. Αν $x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x - 2|$

β. $B = x + |2 - x|$

9. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α. να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

10. Αν $3 < x < 5$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x - 3| + |x - 5|$

β. $B = |x - 2| + |x - 6| + |x|$

11. Να γράψετε την παράσταση $A = |x - 2| - |x - 3|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, όταν:

α. $2 \leq x \leq 3$

β. $x < 2$

γ. $x > 3$

12. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

13. Αν $-2 < \alpha < 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |\alpha + 2| - |\alpha - 1|$

β. $B = |\alpha + 3| - |\alpha - 2|$

γ. $\Gamma = |2\alpha + 5| - |3\alpha - 4|$

14. Αν $\alpha < -1 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |\alpha| + |\alpha + 1| - |\alpha - \beta|$

β. $B = |\alpha + 1| - |\beta + 1| + |\beta - \alpha|$

15. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |2\alpha - 7| + |3\alpha - \beta - 6|$$

16. Αν $\alpha < -1 < \beta$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

α. $A = |\alpha + 1| - |\alpha - \beta| + |\beta + 2| - |\alpha|$

β. $B = |2\alpha - \beta| - |5\alpha - 4\beta|$

17. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α. $A = |x - 1| - 2x + 3$

β. $B = |-x + 2| + 2x - 3$

18. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α. $A = |x + 2| - 2|x + 1|$

β. $B = |x - 1| + |2 - 2x| - 3|x - 2|$

19. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \frac{|x|}{x}$

β. $B = \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y}$

20. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |x - 3| - |3 - x|$

β. $B = \frac{|2x - 1|}{|1 - 2x|} - 3 \frac{|3y + 2|}{|-2 - 3y|} + 2 \frac{|x - y + z|}{|y - x - z|}$

21. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |x - |x|| - |x + |x||$$

22. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 4}{|x| + 2}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

23. Να αποδείξετε ότι:

α. $(|a| - 1)(|a| + 1) = a^2 - 1$

β. $|a + 1|^2 + |a - 1|^2 = 2|a|^2 + 2$

Γ. Ισότητες

24. Να βρείτε τις τιμές του x που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α. $|x| = 1$

β. $|x| - 3 = 0$

γ. $3|x| - 5 = 0$

δ. $2|x| - 5| - x| + 6 = 0$

25. Να βρείτε τις τιμές του x που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α. $|x - 1| = 5$

β. $|x - 2| - 1 = 0$

γ. $2|3x - 2| - 3 = 0$

δ. $3|x - 2| - 2|2 - x| - 5 = 0$

26. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α. $|2x - 1| = |x - 2|$

β. $|3x - 2| - |2x - 3| = 0$

γ. $x^2 - 25 = 0$

27. Αν ισχύει:

α. $|2a - \beta| = |a - 2\beta|$, να δείξετε ότι οι αριθμοί a και β είναι ίσοι ή αντίθετοι

β. $|3a - \beta| - |a + 2\beta| = 0$ και $\beta \neq 0$, να δείξετε ότι $\frac{a}{\beta} = \frac{3}{2}$ ή $\frac{a}{\beta} = -\frac{1}{4}$.

Δ. Ιδιότητες απόλυτης τιμής

28. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$.

29. α. Αν $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

β. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε. Απόσταση δύο αριθμών

30. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x-1 \leq 3$	$d(x, 1) \leq 3$	$[-2, 4]$
$ x+2 < 4$		
$ x-1 > 2$		
$ x+2 \geq 4$		
	$d(x, 1) < 2$	
	$d(x, -1) \geq 5$	
		$[-1, 7]$
		$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

ΣΤ. Ανισότητες

31. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $|x| < 5$

β. $|x| \geq 2$

γ. $3|x| - 2 < 0$

δ. $2 - 3|x| \leq 0$

32. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

α. $|x-1| < 3$

β. $|x-2| \geq 5$

γ. $|3x-2| - 1 < 0$

δ. $d(x, -5) \geq 2$

ε. $|x-1| < |x-3|$

στ. $d(2x, 1) > d(2x, 3)$

33. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = d(2, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$.

34. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $d(x, 2) < 3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

35. Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ και } d(x, 1) \leq 2\} \text{ και } B = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ και } d(x, -1) \geq 1\}$$

α. Να γράψετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

β. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cap B$

ii. $A - B$

36. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α. Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β. Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

37. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $1, x, x^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

38. Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό a , για τον οποίο ισχύει $d(a, 0) < 1$.

α. Να δείξετε ότι $|2 - |a - 1|| = a + 1$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |2a - 2| - |3a + 4|$.

39. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{|x|^3 - 2x^2}{|x| - 2}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $A < 9$.

40. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4$$

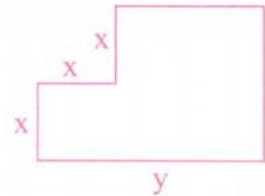
α. Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

41. Αν $|x-1| < 0,2$ και $|y-2| < 0,3$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



42. Αν $|x-1| < 0,1$ και $|y-4| < 0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



Z. Τριγωνική ανισότητα

43. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν:

$$|\alpha|=2, |\beta|=3 \text{ και } |\gamma|=4$$

να δείξετε ότι:

α. $|\alpha + \beta + \gamma| \leq 9$

β. $|\alpha - \beta + 3\gamma| \leq 17$

44. Αν $-1 \leq x \leq 1$, να δείξετε ότι $|x^3 - 3x^2 + 2x - 1| \leq 7$.

45. **α.** Αν $|z-1| \leq 3$ και $|w-3| \leq 1$, να δείξετε ότι $|z+w-2| \leq 6$.

- β.** Αν $|z-2| \leq 3$ και $|w+3| \leq 2$, να δείξετε ότι $|z-w+1| \leq 11$.

H. Γενικές

46. **α.** Να βρείτε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος $[-3, 5]$.

- β.** Αν το διάστημα $[a, 3]$ έχει κέντρο το -5 , να βρείτε το a και την ακτίνα του διαστήματος.

- γ.** Αν το διάστημα $[-2, \beta]$ έχει ακτίνα το 3 , να βρείτε το β και το κέντρο του διαστήματος.

47. Να βρείτε τις τιμές των x, y , για τις οποίες ισχύει $|x+2| + |3x-2y-1| = 0$.

48. Να δείξετε ότι:

α. $\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \right| \leq 1$

β. $\left| \frac{\alpha}{\alpha^2+9} \right| \leq \frac{1}{6}$

49. Αν $\alpha > 1$, να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1, από ότι ο αριθμός α .

50. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y ισχύει $|x|y + x|y| = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ετερόσημοι.

51. Αν ισχύει $\left| \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3} \right| < 1$, να δείξετε ότι $|\alpha| < 1$.

52. Αν ισχύει $|3\alpha + 2\beta| < |6\alpha + \beta|$, $\beta \neq 0$, να δείξετε ότι:

α. $\alpha \neq 0$

β. $|\beta| < 3|\alpha|$

γ. $\left| \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \frac{8}{3}$

δ. $\alpha < 0$, όταν $3\alpha < \beta$

53. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha\beta + |\alpha\beta| \geq |\alpha|\beta + \alpha|\beta|$

β. $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \leq 2$, $\alpha, \beta \neq 0$

54. Να αποδείξετε ότι:

α. $|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2$, $\alpha \neq 0$

β. $|\alpha| + |\beta| + \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha\beta|} \geq 4$, $\alpha, \beta \neq 0$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55. Θεωρούμε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει

$$|\alpha - 1| + |\beta - 2| = 0$$

και την παράσταση $A = |2x - 5| + |3x - 2| - 2|2 - 3x|$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β. Αν $x \in (\alpha, \beta)$, να γράψετε την παράσταση A , χωρίς την απόλυτη τιμή.

γ. Να βρείτε τις τιμές του y , όταν ισχύει:

i. $|2y - 1| - 3\alpha = 0$

ii. $|3y - 1| - |\beta y - 5| = 0$

iii. $|3|y| + \alpha| < \beta$

iv. $|3y - \alpha| \geq \beta$

56. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{2x^2 - 3|x| + 1}{x^2 - 1}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A < 1$.

57. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x}{x^2 + 1}$ και $B = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$.

α. Να αποδείξετε ότι $|A| \leq \frac{1}{2}$.

β. Να αποδείξετε ότι $B \geq 2$.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\Gamma = |A + B| - |A - B|$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

ii. Ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

iii. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει:

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

iv. Η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει, αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μηδέν.

v. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

γ. Να γράψετε τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α .

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους αριθμούς α , β , για τους οποίους ισχύουν:

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| < 1$

α. Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 4$.

β. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i. $5\alpha - \beta$

ii. $10\alpha^2 - 2\alpha\beta$

iii. $\frac{\alpha}{\beta}$

iv. $\alpha^2 - \beta^3$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 + 3|x|}{|x| + 3}$.

- α. Να δείξετε ότι η παράσταση A ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} .
- β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει

$$A < 2|-x| + 3$$

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει

$$d(x, 3) \leq 1$$

- α. Να αποδείξετε ότι $x \in [2, 4]$.
- β. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = |x - 2| + |x - 4|$ είναι ανεξάρτητη του x .
- γ. Να αποδείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \leq 0$.
- δ. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$B = |6x - 8 - x^2| + |x^2 + 9 - 6x|$$