ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.**

α. i. $(\alpha<0 \ \text{και} \ \beta<0) \Rightarrow \alpha+\beta \ \ldots\ldots \ 0$

ii. $(\alpha, \beta \ \text{ετερόσημοι}) \Leftrightarrow \alpha\beta \ \ldots \ 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \ \ldots \ 0$

iii. $\alpha^2>0$, για κάθε α ....

iv. $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$ ....

β. i. $(\alpha>\beta \ \text{και} \ \beta>\gamma) \Rightarrow$ ......

ii. Αν $\gamma<0$, τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \ \ldots \ \beta\gamma$

iii. Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή

$(\alpha>\beta \ \text{και} \ \gamma>\delta) \Rightarrow \alpha\gamma \ \ldots \ \beta\delta$

γ. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύουν οι ισοδυναμίες:

i. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \ \ldots \ \beta^\nu$

ii. $\alpha^\nu=\beta^\nu \Leftrightarrow \alpha \ldots \beta$

δ. i. $\alpha \le x<\beta \Leftrightarrow x \in$ ......

ii. $x<\alpha \Leftrightarrow x \in$ ....

iii. $x \in (\alpha, \beta] \Leftrightarrow$ ....

iv. $x \ge \alpha \Leftrightarrow$ ....

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. i. $\dfrac{\alpha}{\beta}>0 \Leftrightarrow \alpha\beta>0$

ii. $\dfrac{\alpha}{\beta}<0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ ετερόσημοι

iii. $\alpha^2>0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0$

iv. $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0 \ \text{και} \ \beta \ne 0$

β. i. Αν $\gamma>0$, τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$

ii. $\alpha+\gamma>\beta+\delta \Rightarrow (\alpha>\beta \ \text{και} \ \gamma>\delta)$

iii. Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha>\beta \ \text{και} \ \gamma>\delta) \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\delta$$

γ. i. Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν , ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^\nu>\beta^\nu \Leftrightarrow \alpha>\beta$$

ii. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν , ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^\nu=\beta^\nu \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

δ. **i.** $\alpha \le x \le \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$ **ii.** $x \in (\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha \le x \le \beta$

iii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

α.				β.			γ.		δ.		
i.	ii.	iii.	iv.	i.	ii.	iii.	i.	ii.	i.	ii.	iii.

3. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. **i.** $(\alpha > 0 \text{ και } \beta \ge 0) \Rightarrow \alpha + \beta \ge 0$ **ii.** $(\alpha > 0 \text{ και } \beta \ge 0) \Rightarrow \alpha\beta \ge 0$

iii. α, β ομόσημοι $\Rightarrow \alpha\beta + \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ **iv.** $\alpha^2 + \beta^2 \le 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0)$

β. **i.** Αν $\gamma \ne 0$, τότε: $\alpha\gamma > \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha > \beta$

ii. $x > 0 \Rightarrow x < 2x$ **iii.** $x < 0 \Rightarrow 3x > 5x$

iv. Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$$

γ. **i.** Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε: $\alpha^2 > \beta^2 \Leftrightarrow \alpha > \beta$

ii. Αν $\alpha, \beta < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

iii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^3 > \beta^3$ **iv.** $\alpha^5 = \beta^5 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

v. $x > 1 \Rightarrow x^2 < x^3$ **vi.** $0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2$

δ. **i.** Αν α, β ομόσημοι, τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\beta}$ **ii.** $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$

iii. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \ge 2$. **iv.** Αν $\alpha < 0$, τότε $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \le -2$.

α.				β.			
i.	ii.	iii.	iv.	i.	ii.	iii.	iv.

γ.						δ.			
i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.	i.	ii.	iii.	iv.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Πρόσημο Γινομένου – Αθροίσματος

4. Αν $2<x<3$, να δείξετε ότι:

α. $(x-2)(x-3)<0$ β. $x^2-5x+6<0$

5. Αν $\alpha>-1$ και $\beta<2$, να δείξετε ότι:

α. $(\alpha+1)\cdot(\beta-2)<0$ β. $\alpha\beta-2<2\alpha-\beta$

6. Αν $\alpha<2\leq\beta$, να δείξετε ότι:

α. $(\alpha-2)\cdot(\beta-2)\leq 0$ β. $\alpha\beta+4\leq 2\alpha+2\beta$

7. α. Αν $\alpha<3<\beta$, να δείξετε ότι $9+\alpha\beta<3\alpha+3\beta$.

β. Αν $\alpha\geq 1>\beta$, να δείξετε ότι $1+\alpha\beta\leq\alpha+\beta$.

8. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2+1\geq 2\alpha$ β. $\alpha^2+9\geq 3\alpha\cdot(4-\alpha)$

γ. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)\geq 2\beta(3\alpha-5\beta)$ δ. $(\alpha^2+1)\cdot(\beta^2+4)\geq(\alpha\beta+2)^2$

9. α. Αν $\alpha>1$, να δείξετε ότι $\alpha-5>2(1-3\alpha)$.

β. Αν $\alpha\leq -2$, να δείξετε ότι $\alpha(\alpha+3)\leq\alpha^2-2(\alpha+5)$.

γ. Αν $\alpha>2$, να δείξετε ότι $\alpha^3+\alpha>2\alpha^2+2$.

10. Αν οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\leq -2$.

11. Αν $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι:

α. $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ β. $\alpha<\dfrac{\alpha+2\beta}{3}<\beta$

12. Να αποδείξετε ότι $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$.

13. Να δείξετε ότι:

α. $x^2-4x+5>0$ β. $9x^2-6x+2>0$

γ. $2x^2+2x+1>0$ δ. $5x^2+4x+1>0$

Β. Εύρεση παραμέτρων από μηδενικό άθροισμα μη αρνητικών αριθμών

14. Να βρείτε τους αριθμούς x, y , για τους οποίους ισχύει:

α. $4x^2+y^2-4x+1=0$ β. $x^2+y^2-10x+4y=-29$

γ. $2x^2+1+2xy-2x+y^2=0$ δ. $x^2+2y^2-2x+4y+3=0$

15. Να δείξετε ότι:

α. $x^2+y^2-2x+1\geq 0$ β. $x^2+y^2-4x+6y\geq -13$

γ. $2x^2+y^2-2xy\geq 0$ δ. $2x^2+y^2-2xy+2x+1\geq 0$

Πότε ισχύουν οι παραπάνω ισότητες;

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή των παραστάσεων των $1^{ων}$ μελών των παραπάνω σχέσεων;

Γ. Ιδιότητες ανισοτήτων

16. Αν $-2<x<3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A=x+1$ β. $B=2x-3$ γ. $\Gamma=-3x+1$

17. Αν $1<x\leq 3$ και $2\leq y<5$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x+y$ β. xy γ. $2x+y$ δ. $x-3y$ ε. $x-y$

18. Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x+y$ β. xy γ. $2x-3y+2$ δ. $x-y$

19. Αν $3<x<4$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\frac{1}{x}$ β. $\frac{1}{y}$ γ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ δ. $\frac{x}{y}$

20. Αν $2<x\leq 3$ και $4\leq y<5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $3y-2x$ β. $3y^2-2xy$ γ. $x-\frac{1}{y}$

21. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2\leq\alpha\leq 4$ και $-4\leq\beta\leq -3$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $\alpha-2\beta$ β. $\alpha^2-2\alpha\beta$

Δ. Ανισότητες και δυνάμεις

22. Αν $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι:

α. $\alpha^3+\alpha<\beta^3+\beta$ **β.** $2\alpha^5+\alpha^3+3\alpha<2\beta^5+\beta^3+3\beta$

23. **α.** Αν $0<\alpha<\beta$, να δείξετε ότι:

i. $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<\beta-\dfrac{1}{\beta}$ **ii.** $\alpha^2-\dfrac{1}{1+\alpha}<\beta^2-\dfrac{1}{1+\beta}$

β. Αν $\alpha<\beta<0$, να δείξετε ότι:

i. $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha}>\beta^2+\dfrac{1}{\beta}$ **ii.** $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^2}<\beta^3+\dfrac{1}{\beta^2}$

24. **α.** **i.** Αν $x>0$, να δείξετε ότι $2x<3x<5x$.

ii. Αν $x<0$, να δείξετε ότι $3x>5x>7x$.

β. **i.** Αν $x>1$, να δείξετε ότι $x^2<x^3<x^4$.

ii. Αν $0<x<1$, να δείξετε ότι $x^2>x^3>x^4$.

25. Αν $2<x<3$ και $-4<y<-1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. x^2+y^3 **β.** y^2-x^3

26. Αν $-3<x<-2$ και $-2<y<-1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. xy **β.** $\dfrac{x}{y}$ **γ.** x^2+y^3

Ε. Σύγκριση δύο αριθμών

27. Αν $\alpha<-2$ και $\beta>-1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α. $\alpha\beta+2$ και $-\alpha-2\beta$ **β.** α^2 και $-\beta^3+3$

28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α. 2^{30} και 3^{20} **β.** 5^{10} και 3^{15}

29. Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε:

α. να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $(\alpha\beta)^5$ και α^{10} **ii.** $\alpha^7\beta^4$ και $\alpha^4\beta^7$

β. να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\frac{\alpha}{\beta}$, 1, $\frac{\beta}{\alpha}$.

30. Αν $x \neq 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $(x^5 + x^3)^4$ και x^{20} .

ΣΤ. Διαστήματα

31. Αν θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το $\mathbb{R}$ και $A = (-\infty, 1]$, $B = (0, 2]$ δύο υποσύνολά του, να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$ **β.** $A \cap B$ **γ.** A' **δ.** $A - B$

32. Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{x \in \mathbb{R} \ / -2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \leq 2\}$

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1\}$, $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -1\}$

α. Να γράψετε τα παραπάνω σύνολα με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

β. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cup B$ **ii.** $A \cap B$ **iii.** $B \cap \Gamma$

iv. $A \cap \Gamma$ **v.** Γ'

γ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν) της μεταβλητής y , όταν ισχύουν:

i. $y \in [2, 5]$ **ii.** $y \in (-\infty, -1]$ **iii.** $y \in [0, +\infty)$ **iv.** $y \in (1, 5)$

Ζ. Γενικές

33. **α.** Αν $\alpha, \beta > 0$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

β. Αν $x, y, z > 0$, να δείξετε ότι

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6$$

34. Να δείξετε ότι:

α. $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$ **β.** $101\cdot(x^2+y^2)\geq(10x+y)^2$

35. Αν $\alpha,\beta>0$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$$

36. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ **β.** $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

37. Αν $\alpha-\beta=3$, να δείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2\geq\frac{9}{2}$$

38. Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha+\beta=1$, να δείξετε ότι:

α. $\beta<1$ **β.** $\alpha\beta\leq\frac{1}{4}$ (πότε ισχύει το = ;)

γ. $\alpha^2+\beta^2\geq\frac{1}{2}$

39. Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha+\beta=2$, να δείξετε ότι:

α. $\beta<2$ **β.** $\alpha\beta\leq 1$ (πότε ισχύει το = ;)

γ. $\alpha^2+\beta^2\geq 2$

40. Αν $\alpha^3-2>2\alpha^2-\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha>2$.

41. Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^2-\beta^2<-1$, να δείξετε ότι $\alpha<\beta$.

42. Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha^2-\beta^2=-1$, να δείξετε ότι $\beta<0$ και στη συνέχεια ότι $\beta\leq-1$.

43. Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha^2-\beta^2>1$, να δείξετε ότι $\alpha>0$ και στη συνέχεια ότι $\alpha>1$.

44. **α.** Αν $x, y > 0$, να δείξετε ότι $\frac{x+y}{4} \geq \frac{xy}{x+y}$.

β. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

45. **α.** Αν $x, y > 0$, να δείξετε ότι $\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{2}$.

β. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$$

46. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$4 \leq x \leq 7 \quad \text{και} \quad 2 \leq y \leq 3$$

α. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47. Θεωρούμε τους αριθμούς α και β, για τους οποίους ισχύει:

$$4\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-2)=-2$$

Έστω επιπλέον οι αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύουν:

$$2\alpha \le x \le 2\beta \quad \text{και} \quad \alpha \le y < \beta$$

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

β. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i. $2x-3y$ **ii.** $\frac{x}{y}$ **iii.** x^2-y^3

48. Θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2-\beta^2<0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\beta}{\alpha}$

β. $\alpha<\beta$

γ. $\alpha^3-\frac{1}{\alpha}<\beta^3-\frac{1}{\beta}$

δ. $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$

49. Δίνεται η παράσταση

$$A=x^2+y-xy-x \quad \text{και} \quad 1<y<x$$

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A.

β. Να αποδείξετε ότι $A>0$.

γ. Να αποδείξετε ότι $A+\frac{4}{A}\ge 4$.

δ. Να αποδείξετε ότι $A+A^2+\frac{4}{A}+\frac{4}{A^2}\ge 8$.

Διαγωνισμα

ΘΕΜΑ Α

α. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).*

i. Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ **ii.** $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

iii. Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.

v. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$$

β. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν , να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

ΘΕΜΑ Β

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες και στη συνέχεια να εξετάσετε πότε ισχύει το ίσον.

α. $x^2 \geq 6x - 9$

β. $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

γ. $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$, όταν α , β ομόσημοι

ΘΕΜΑ Γ

Αν $4 \leq x < 5$ και $1 \leq y < 2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $2x - 3y$ **β.** $2x^2 - 3xy$ **γ.** $\dfrac{x}{y}$ **δ.** $x^2 + y^3$

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2} = \kappa - \lambda - 1$$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ .

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda \leq \dfrac{2x}{x^2 + 1} \leq \kappa$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

γ. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 1} + \dfrac{\beta}{\beta^2 + 1} \leq 1$.