

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- α.** Αν $a \geq 0$, η \sqrt{a} παριστάνει τη λύση της εξίσωσης
- β.** $\sqrt{a^2} = \dots$
- γ.** Η n -οστή ρίζα ενός αριθμού a είναι ο αριθμός που, όταν υψωθεί στην δίνει τον
- δ.** Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt[n]{a})^n = \dots$ και $\sqrt[n]{a^n} = \dots$
- ε.** Αν $a \leq 0$ και n άρτιος, τότε $\sqrt[n]{a^n} = \dots$
- στ.** Αν $a \geq 0$, τότε $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \dots$ και $\sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \dots$
- ζ.** Αν $a, \beta \geq 0$, τότε $\sqrt[n]{a^n \cdot \beta} = \dots$
- η.** Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $a^{\frac{\mu}{n}} = \dots$
- 2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
- α.** Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a είναι ο θετικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a .
- β.** $\sqrt{a^2} = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- γ.** Αν $a \leq 0$ και n άρτιος, τότε $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
- δ.** $\sqrt{a \cdot \beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$, όταν $a \cdot \beta \geq 0$
- ε.** $\sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$, όταν $a \geq 0$
- στ.** $\sqrt[n]{a^n \cdot \beta} = a \sqrt[n]{\beta}$, όταν $a, \beta \geq 0$
- ζ.** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Τετραγωνικές ρίζες

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{49} + \sqrt{144} - \sqrt{196} - 2\sqrt{625}$ β. $B = \sqrt{400} + \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56}$

4. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά.

α. $A = \sqrt{(-7)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ β. $B = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{\pi^2 - 4\pi + 4}$

5. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

6. Αν $x = 2\sqrt{3} - 1$ και $y = 2\sqrt{3} + 1$, να βρείτε την αριθμητική τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A = xy$ β. $B = x^2 - xy + y^2$ γ. $\Gamma = x^3 + y^3$

7. Να δείξετε ότι $(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}) \cdot (\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}) = 2$.

8. α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(1+2\sqrt{5})^2$ και $(1-2\sqrt{5})^2$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{21+4\sqrt{5}} - \sqrt{21-4\sqrt{5}}$.

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 - 2$ β. $5x^2 - 2x\sqrt{5} + 1$

10. Αν $A = \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{75}$, $B = \sqrt{18} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + \sqrt{48}$ και $\Gamma = \sqrt{504}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. A , B και Γ β. $A \cdot B$

11. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$.

12. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{48}}{\sqrt{24}} = 6$

β. $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{150}} = 2$

13. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{9^{13} + 27^9}$

β. $B = \frac{\sqrt{2^{20} + 4^{12}}}{\sqrt{4^{11} + 8^6}}$

14. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{5}} = 3$

β. $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 1$

15. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{x-2}$

β. $B = \sqrt{5-3x} + \sqrt{x-1}$

γ. $\Gamma = \sqrt{x^2-4}$

δ. $\Delta = \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}$

ε. $E = \frac{x-2}{\sqrt{9-x^2}}$

στ. $K = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

16. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και μετά, να τις απλοποιήσετε.

α. $A = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$

β. $B = \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 36}}{2x - 12}$

γ. $\Gamma = \frac{x^2 - x}{\sqrt{1 - 2x + x^2}}$

δ. $\Delta = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$

17. Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

18. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.

α. Να γράψετε την παράσταση A , χωρίς ριζικά.

β. Αν $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2$.

19. Αν $d(3x, -1) < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{1 - 4x + 4x^2}$

β. $B = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{9x^2 - 1}{\sqrt{1 - 6x + 9x^2}}$

Β. Μετασχηματισμός κλασμάτων σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

20. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

β. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

γ. $\frac{3}{\sqrt{8}}$

21. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α. $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

β. $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

γ. $\frac{3}{\sqrt{2} + 1}$

δ. $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$

22. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α. $\frac{7}{2 - 3\sqrt{2}}$

β. $\frac{2}{\sqrt{5} + 2} + \frac{3}{\sqrt{2} + 1}$

γ. $\frac{1 + 2\sqrt{5}}{1 - 2\sqrt{5}}$

δ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50} - \sqrt{12}}$

Γ. Υπολογισμός παραστάσεων

23. Να δείξετε ότι:

α. $\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$

β. $\frac{5}{3 - 2\sqrt{2}} + \frac{2}{7 - \sqrt{50}} = 1$

γ. $\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} = 10$

δ. $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = 4$

ε. $(2 - \sqrt{3})^{-2} + (2 + \sqrt{3})^{-2} = 14$

24. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A = 4$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

25. α. Αν $\alpha, \beta > 0$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \alpha + \beta + \sqrt{\alpha\beta}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 8 + \sqrt{15}$.

Δ. ν-οστές ρίζες

26. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27}$

β. $B = \sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{64}$

γ. $\Gamma = \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{32} - \sqrt[6]{64} + 3\sqrt[10]{1024}$

δ. $\Delta = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

27. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt[7]{4 - \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{121}}}$

β. $B = \sqrt[5]{241 + \sqrt[4]{4 + 3\sqrt[3]{64}}}$

28. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $x < 0 < y$, να δείξετε ότι:

α. $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt{y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy = 0$

β. $\sqrt{x^4 y^2 - 2x^3 y^3 + x^2 y^4} = x^2 y - xy^2$

29. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{(x-1)^6} + \sqrt[3]{(x-2)^3}$. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζεται η παράσταση A και στη συνέχεια, να την απλοποιήσετε.

30. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

β. $B = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} + \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$

31. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας.

α. $\sqrt{\sqrt[4]{5}}$

β. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

γ. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

δ. $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{25}}}$

32. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας.

α. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$

β. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2^3}$

γ. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$

δ. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

33. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}} - \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{9}}} + 3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}}} = 1$.

34. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt[6]{135} = 15$.

35. Να δείξετε ότι:

α. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} = 3$

β. $(\sqrt[6]{8}+1) \cdot (\sqrt[6]{8}-1) = 1$

γ. $\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{5+3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{5-3\sqrt{2}} = 7$

δ. $(\sqrt[4]{5}-2) \cdot (\sqrt[4]{5}+2) \cdot (\sqrt{5}+4) = -11$

ε. $(1-\sqrt[8]{2}) \cdot (1+\sqrt[8]{2}) \cdot (1+\sqrt[4]{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) = -1$

36. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{3\sqrt{3} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$.

37. α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(\sqrt{2}-1)^3$ και $(1+\sqrt{2})^3$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

38. Να γράψετε τις παρακάτω δυνάμεις με ρίζες.

α. $2^{\frac{1}{2}}$

β. $2^{\frac{4}{3}}$

γ. $3^{-\frac{1}{2}}$

δ. $5^{-\frac{3}{2}}$

39. Να δείξετε ότι:

α. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2$

β. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[12]{1024} = 4$

Ε. Ανισότητες

40. Να αποδείξετε ότι

α. $\sqrt[3]{9} > 2$

β. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

γ. $2\sqrt[3]{3} > \sqrt{5}$

41. Να αποδείξετε ότι:

α. $1+\sqrt{2} > \sqrt{5}$

β. $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$

γ. $\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$

δ. $\sqrt[3]{11+6\sqrt{3}} > 1+\sqrt{3}$

42. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α. $1-\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}-2$

β. $2\sqrt{2}$ και 3

γ. $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{8}$

δ. $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{2}$

ε. $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

στ. $\sqrt{2}-1$ και $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

43. Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο:

$$2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}$$

44. Αν $1 \leq x < 2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές της παρά-

στασης $A = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + x^2$.

45. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

α. Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

46. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

47. Έστω $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha > 0$.

β. Να βρείτε το α^2 .

γ. Να βρείτε την τιμή του α .

Z. Γενικές

48. Να δείξετε ότι $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

49. Να βρείτε τους αριθμούς x , y και z , για τους οποίους ισχύει:

$$x^2 - 2x + 1 + |x - y + 3| + \sqrt[5]{x + y - z} = 0$$

50. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

β. $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

γ. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

δ. $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

ε. $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$

στ. $\sqrt{12 - 4\sqrt{5}}$

51. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$

β. $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

52. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

β. $\frac{7}{\sqrt[3]{7^4}}$

γ. $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 2}}$

δ. $\frac{6}{\sqrt[3]{3 \cdot 4^3}}$

53. Να δείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$

β. $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$, $x \geq 0$

γ. $(y+1)(z+1)(w+1) \geq 8\sqrt{yzw}$, $y, z, w \geq 0$

54. α. Να βρείτε τις τιμές των x, y που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 - 2y\sqrt{5} + 5 = 0$$

β. Να βρείτε τις τιμές των θετικών αριθμών α, β για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha + 4\beta + 2 = 2(\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta})$$

55. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$P = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{6-2\sqrt{5}}$$

56. Να δείξετε ότι:

α. i. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$

ii. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}-1) = 1$

β. $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{3}) = 1$

57. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να δείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha^4 + 4\beta^2} + \sqrt{\beta^4 + 4\alpha^2} = 3$$

58. α. Αν $x, y > 0$ με $x \neq y$ και

$$A = (\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

να δείξετε ότι $A = \frac{x-y}{\sqrt[8]{x} - \sqrt[8]{y}}$.

β. Να μετατρέψετε την παράσταση

$$B = \frac{1}{(1 + \sqrt[8]{2})(1 + \sqrt[4]{2})(1 + \sqrt{2})}$$

σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

59. Θεωρούμε τις παραστάσεις:

$$\bullet \alpha = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{50}}{\sqrt{12} - \sqrt{75}} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\bullet \beta = \frac{7}{1 - 2\sqrt{2}} + 2 + 2\sqrt{2}$$

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + 2\sqrt{2\beta})^2$, $(\alpha - 2\sqrt{2\beta})^2$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{2\beta}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2\beta}} = 2$.

γ. Αν $\alpha < x < 2\beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$$

60. Θεωρούμε τις παραστάσεις:

$$\bullet \alpha = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} - \sqrt{2} - 1$$

$$\bullet \beta = \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{24}$$

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις α και β .

β. Να υπολογίσετε την παράσταση

$$K = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha} + 1} - \frac{4}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}$$

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{2\beta}$ και $1 + \sqrt{\alpha}$.

61. Θεωρούμε τις παραστάσεις:

$$\bullet \alpha = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2^3 \sqrt{2}}}$$

$$\bullet \beta = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}} - \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{2}}} - 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$$

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις α και β .

β. Αν $\beta + 2 \leq x < \alpha - 2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η τιμή της παράστασης $K = \sqrt[6]{x^3} - \frac{1}{x}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\alpha - \beta} - \beta} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\alpha - \beta} + \beta} = 2$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

- α.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
- i.** Αν $a \leq 0$ και n άρτιος θετικός ακέραιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- ii.** Αν $a \geq 0$, τότε η \sqrt{a} παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.
- iii.** Αν $a, \beta \geq 0$, τότε $a\sqrt{\beta} = \sqrt{a^2 \cdot \beta}$.
- iv.** Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$.
- v.** Αν $a \geq 0$, τότε $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$.
- β.** Αν $a, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$.
- γ.** Να γράψετε τον ορισμό της n -οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a .

ΘΕΜΑ Β

Έστω $\alpha = \sqrt[5]{30 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[3]{8}}}$.

- α.** Να βρείτε την τιμή του α .
- β.** Να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha - \sqrt{3}} + \frac{1}{\alpha + \sqrt{3}} = 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\alpha = \sqrt{2} - 1$ και $\beta = \alpha - \frac{1}{\alpha}$.

- α.** Να δείξετε ότι $\beta = -2$.
- β.** Να υπολογίσετε τις δυνάμεις α^2 και α^3 .
- γ.** Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.
- δ.** Να δείξετε ότι $\alpha > \beta + \sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι αριθμοί $\alpha = \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)^2$, $\beta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} - 3$ και η παράσταση:

$$A = \frac{x - \alpha}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{2x + \beta}{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}$$

- α.** Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β .
- β.** Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζεται η παράσταση A και στη συνέχεια, να την γράψετε χωρίς ριζικά.
- γ.** Αν $d(2x, 3) < 1$, να αποδείξετε ότι $A = 0$.