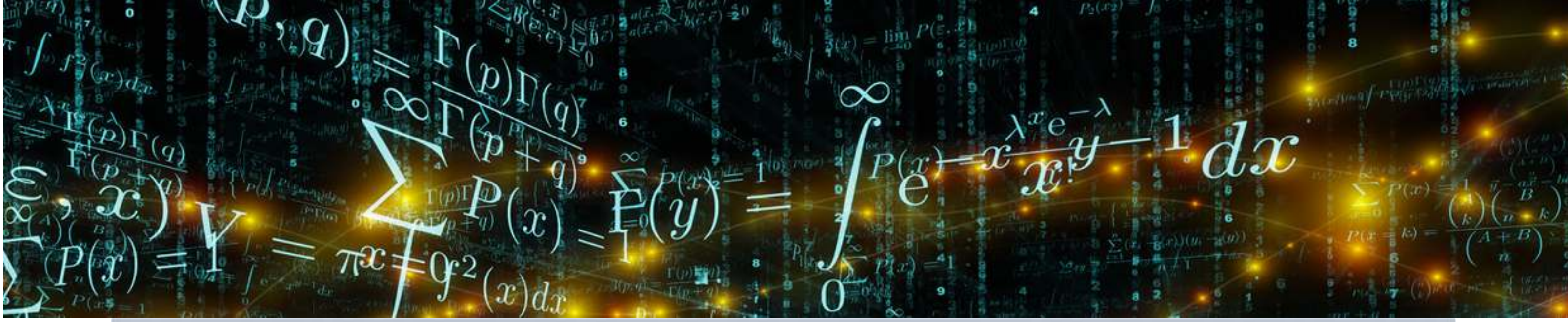

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ ....

δύο .... πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

....

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι .... πολυώνυμο ή έχει βαθμό

.... από το βαθμό του ......

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με

....

γ. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$, αν και μόνο αν

...... = ...

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου το $\upsilon(x)$ έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου, για $x=\rho$.

γ. Αν για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(\rho) \neq 0$, τότε το $x-\rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

δ. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x-\rho$, τότε $P(\rho)=0$.

ε. Αν για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(\rho)=0$, τότε το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.

3. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Αν ο διαιρέτης σε μία διαίρεση πολυωνύμων είναι δεύτερου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή $\alpha x+\beta$.

β. Αν το πηλίκο μίας διαίρεσης πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο διαιρετέος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

γ. Αν ο διαιρετέος είναι $3^{ου}$ βαθμού και ο διαιρέτης $2^{ου}$ βαθμού, τότε το πηλίκο έχει μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$.

δ. Αν $P(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

ε. Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)\cdot(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+\ldots+\alpha^{\nu-1})$.

στ. Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ και ν περιττός, τότε:

$$x^\nu+\alpha^\nu=(x+\alpha)\cdot(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\alpha+\ldots+\alpha^{\nu-1})$$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.

4. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Για $x\neq 1$, ισχύει $x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+1=\dfrac{x^\nu-1}{x-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

β. Αν $x\neq -1$, τότε $x^4-x^3+x^2-x+1=\dfrac{x^5+1}{x+1}$.

γ. Ισχύει $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^9=1023$.

δ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x)=x^\nu-\alpha x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}-\ldots-\alpha$$

με το $x-(\alpha+1)$ είναι 1.

α.	β.	γ.	δ.

Ασκησεις Αναπτυξης

Α. Ταυτότητα της διαίρεσης

5. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να κάνετε τη διαίρεση, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

α. $(6x^3 - x^2 - 14x + 5):(2x - 1)$ **β.** $(x^4 - x^2 + 1):(x^2 + x + 1)$

γ. $(x^3 - x^2 - x + 1):(x - 1)^2$ **δ.** $x^4 :(x - 2)^3$

6. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 5x)\cdot(5x - 1) - 3x + 2$.

α. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left[P(x):(x^2 - 5x)\right]$.

β. Την παραπάνω ισότητα μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως ταυτότητα της διαίρεσης $\left[P(x):(5x - 1)\right]$;

7. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο, όταν το διαιρέσουμε με το $3x^3 + 5$ δίνει πηλίκο $x^2 - 3$ και υπόλοιπο $2x - 1$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Να δείξετε ότι το $x^2 - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$Q(x) = P(x) - 2x + 1$$

8. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 3x$ δίνει πηλίκο $x^2 + x + 9$ και υπόλοιπο $21x + 12$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x^2 + 3$ διαιρεί το $P(x)$.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 + 3}$.

9. Αν η διαίρεση ενός πολυωνύμου $\Delta(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x) = x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $\pi(x) = x^2 - 3x + 4$ και υπόλοιπο $\upsilon(x) = -6x + 6$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\delta_1(x) = x^2 - 3x + 2$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - (\alpha + 1)x^2 + x + 4\alpha - 6$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $(x-1)^2$ και στη συνέχεια, να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να βρείτε τις τιμές των α και β, για τις οποίες το $(x-1)^2$ διαιρεί το $P(x)$.

12. Να βρείτε των τιμές των α και β , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ διαιρείται από το $x^2 + 1$.

13. Να βρείτε τις τιμές των α , β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 1$, να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + \alpha x + \beta$.

14. Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε το $P(x) = x^4 + 1$, να έχει παράγοντα $x^2 + \alpha x + 1$.

Β. Πηλίκο της διαίρεσης $P(x):\delta(x)$

15. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, το οποίο διαιρείται με το $x^2 - 2x + 3$ και ισχύουν $P(0) = 3$ και $P(1) = 4$. Να βρείτε το $P(x)$.

16. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού, του οποίου η διαίρεση με το $x^2 + 2$ δίνει υπόλοιπο $3x - 1$ και ισχύουν $P(0) = -7$ και $P(2) = 11$.

Γ. Υπόλοιπο της διαίρεσης $[P(x):\delta(x)]$ με $\delta(x) \neq x - \rho$

17. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(1) = 4$ και $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $2x^2 - x - 1$.

18. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 1$ είναι $2x + 1$ και το $P(x)$ έχει ρίζα το 0. Να βρείτε:

α. το $P(1)$

β. το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x$.

19. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(0) = 0$, $P(1) = 2$ και $P(-1) = 3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 - x$.

20. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο είναι $P\left(\frac{2}{5}\right) = 7$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $5x - 2$.

21. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-\alpha x^2+3\alpha x-2\alpha^2$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(3x-\alpha)$ είναι -1 , να βρείτε το α .

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-2)^{2015}+2x-1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με x^2-4x+3 .

23. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\alpha x+\beta$ διαιρούμενο με το x^2-1 δίνει υπόλοιπο $3x+2$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-4)^{17}+\alpha x+\beta$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2-8x+15$ είναι $\upsilon(x)=3x+1$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Δ. Υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x−ρ)

25. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α. $P(x):(x-2)$, όταν $P(x)=x^3-x+1$

β. $P(x):(x+3)$, όταν $P(x)=x^3+5x^2-1$.

26. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x+\alpha^2$ διαιρούμενο με το $x+1$ δίνει υπόλοιπο 1 .

27. Να βρείτε τις τιμές των α , β , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x+\beta$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x είναι 2 .

28. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^2+2\lambda x-\lambda+2$ με το $x+3\lambda$, να είναι $7-3\lambda$.

29. Να βρείτε τα α και β , ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=4x^2-\alpha x+\beta-2\alpha$ με το $x+\frac{1}{2}$, να είναι 1 και το -1 να είναι ρίζα του $P(x)$.

30. Να βρείτε τις τιμές των α , β , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x+\beta-1$ διαιρούμενο με $x+1$ δίνει υπόλοιπο 3 , ενώ διαιρούμενο με x δίνει υπόλοιπο 2 .

31. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων

$$P(x)=2\alpha^2x^4-4\beta x^2+1 \quad \text{και} \quad Q(x)=\beta^2x^3+3x+\alpha^2$$

με το $x+1$ είναι ίσα, να βρείτε τις τιμές των α και β .

32. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+2, έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-2$ είναι 6. Να βρείτε το $P(x)$.

33. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το x^3+x-2 είναι x^2-3. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

34. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2+x-6.

35. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 0 και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα $x-2$ και $x+2$ είναι αντίστοιχα -1 και 3, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^3-4x.

36. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $Q(x)$ με το $x+1$ είναι 3, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x+1$, όπου

$$P(x)=(x^3+2)Q(x)+2x+3 \qquad (1)$$

37. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x+2$ είναι 2, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$Q(x)=P(9x+7)+x^3-10 \qquad (1) \qquad \text{με το} \quad x+1$$

Ε. Παράγοντας πολυωνύμου της μορφής x−ρ

38. Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα $x-2$ και $x+1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3-x-6$.

39. Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα, δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-ρ$.

α. $P(x)=5x^8+3x^4+2$ β. $Q(x)=-7x^6-3x^2-1$.

40. Να βρείτε τις τιμές των $α$, $β$, για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^3+αx+β$ έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+2$.

41. Αν το πολυώνυμο $P(x)=-x^3+α^2x^2-β^2x-2α$ έχει παράγοντα το $x+1$, να βρείτε τα $α$ και $β$.

42. Να βρείτε τις τιμές των $α, β,$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^3+αx+β$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι -2.

43. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+x+\beta$ έχει παράγοντα το $x+\alpha$, να δείξετε ότι έχει παράγοντα και το $x+\beta$.

44. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=-2(x+5)^{21}+3(x+4)^{17}-x-2$ έχει ως παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x)=x^2+9x+20$.

45. Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-(\alpha-\gamma)x^2-2\beta x+\gamma-1$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x)=x^3-x$, να βρείτε τα α , β , γ .

46. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\alpha^2-1$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x(x+1)$, να βρείτε τα α και β .

47. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+2\alpha$ έχει παράγοντα το x^2+2x-3 , να βρείτε τα α και β .

48. Αν $P(x)$ πολυώνυμο και ρ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)-x$, να δείξετε ότι το $x-\rho$ διαιρεί το πολυώνυμο $Q(x)=P\big(P(x)\big)-x$.

49. Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_0$ έχει ρίζες τους αριθμούς α_0 και ρ , να δείξετε ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$Q(x)=P\Big(P\big(P(x)\big)\Big)$$

ΣΤ. Σχήμα Horner

50. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων και να γράψετε την ταυτότητα των διαιρέσεων.

α. $(-x^3-3x+1):(x-2)$

β. $(x^3+1):(x+1)$

γ. $(4x^4-x+3):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

δ. $(x^2+\alpha x+3):(x+\alpha)$

51. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=-x^3+x-2$. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+5$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

52. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x-2+\sqrt{3}$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$x^3-5x-16+10\sqrt{3}$$

53. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:

α. $P(x)=x^4-6x^3-6x^2-6x-6$ με το $x-7$

β. $P(x)=x^\nu-\alpha x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}-\ldots-\alpha$ με το $x-(\alpha+1)$.

54. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)(x+3)$.

55. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-3x^2+4$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

56. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x+\beta$ να έχει παράγοντα το x^2-1.

57. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-(\alpha+\beta)x+\beta-4$ να έχει παράγοντα το x^2-2x-3.

58. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-5x^2+\beta x+9$ να έχει παράγοντα το $(x-3)^2$.

59. Αν τα πολυώνυμα $x-2$, $x-1$ διαιρούν ακριβώς το πολυώνυμο $P(x)$ και δίνουν πηλίκα $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\pi_1(1)=\pi_2(2)$.

Ζ. Γενικές

60. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{5x-3}{x-2}$ στη μορφή $f(x)=\kappa+\dfrac{\lambda}{x-2}$ και στη συνέχεια, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της στο διάστημα $(-\infty, 2)$.

61. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2+x-5}{x-1}$ στη μορφή $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x-1}$ και στη συνέχεια, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της στο $(1, +\infty)$.

62. Να γράψετε την παράσταση $\dfrac{2}{x^2-3x+2}$, ως άθροισμα απλών κλασμάτων.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-1}$.

α. Να γράψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma x+\delta}{x^2-1}$.

β. Να γράψετε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\gamma x+\delta}{x^2-1}$, ως άθροισμα απλών κλασμάτων (οι αριθμοί γ, δ είναι του προηγούμενου ερωτήματος).

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

64. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2+\lambda)x^4+(\lambda+1)x^3+3x^2+\mu-1$, το οποίο είναι $3^{ου}$ βαθμού και έχει παράγοντα το $x+1$.

α. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ.

β. Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το x^2+3 και στη συνέχεια, να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

γ. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

δ. Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών και το σταθερό όρο του πολυωνύμου

$$Q(x)=P(x)+(x-2)^{10}$$

65. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5+3x^2+\alpha x+\beta$, το οποίο διαιρούμενο με το x^2-2, δίνει υπόλοιπο $-x-3$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το x^2-2 και στη συνέχεια, να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

γ. Να δείξετε ότι το x^3+2x+3 διαιρεί το πολυώνυμο $Q(x)=x+P(x)+3$.

δ. Να δείξετε ότι η διαίρεση του πολυωνύμου $R(x)=P(2x+3)+(x+3)^{15}+1$ με το $x+2$ είναι τέλεια.

66. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$, το οποίο είναι $3^{ου}$ βαθμού, το άθροισμα των συντελεστών του είναι 0, ο σταθερός όρος του είναι 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left[P(x):(x^2+1)\right]$ είναι $-x+5$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1+\sqrt{3}$ διαιρεί το $P(x)$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $x-\lambda$ να είναι παράγοντας του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1+\sqrt{3}$.

δ. Να βρείτε τις τιμές των α, β, για τις οποίες το πολυώνυμο $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)=P(x)+3x^2+\alpha x+\beta$.