ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})= \ldots\ldots$ ii. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+ \ldots\ldots$

iii. $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x}= \ldots\ldots$

iv. Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα .... μείον τη διανυσματική ακτίνα ....

v. $\ldots\ldots\ldots\ldots \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ iii. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

iv. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ v. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq \big||\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\big|$

i.	ii.	iii.	iv.	v.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Αν $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

ii. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=0$, τότε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα.

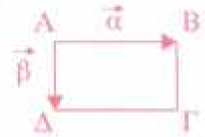
iii. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ iv. $|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

v. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

vi. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi$

vii. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$$



i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.	vii.

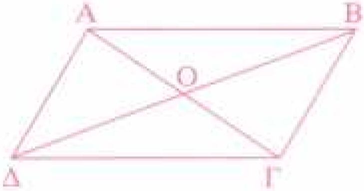
4. i. Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}= \ldots\ldots$ β. $\overrightarrow{B\Gamma}+\ldots\ldots=\overrightarrow{B\Delta}$

γ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma B}= \ldots\ldots$ δ. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}= \ldots\ldots$

ε. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}= \ldots\ldots$ στ. $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Delta}= \ldots\ldots$

ii. **Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:**



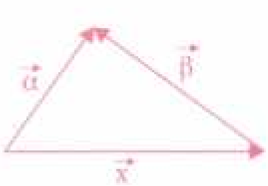
α. $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=.....$ β. $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=.....$

γ. $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=.....$ δ. $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=.....$

ε. $\vec{\Delta O}+.....=\vec{\Delta\Gamma}$

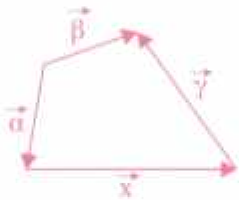
5. **Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται.**

i.



$\vec{x}=$..........

ii.



$\vec{x}=$...............

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Πρόσθεση – Αφαίρεση διανυσμάτων

6. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Να βρείτε τα αθροίσματα:

i. $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{B\Gamma}$ **ii.** $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Delta B}+\vec{A\Gamma}+\vec{EA}$

iii. $\vec{AB}-\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma A}$ **iv.** $\vec{B\Delta}-\vec{A\Delta}+\vec{E\Gamma}-\vec{B\Gamma}+\vec{AE}$

7. Να βρείτε τα αθροίσματα:

i. $\vec{AB}+\vec{MA}+\vec{\Lambda K}-\vec{MK}-\vec{\Lambda B}$ **ii.** $\vec{OA}+\vec{\Gamma\Delta}-\vec{OB}-\vec{\Gamma B}+\vec{AB}$

8. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

i. Αν Ρ, Κ τυχαία σημεία του επιπέδου, να βρείτε το άθροισμα

$$\vec{PB}+\vec{K\Delta}-\vec{PA}-\vec{KA}$$

ii. Αν Μ το μέσο του ΓΔ, να δείξετε ότι $\vec{MA}+\vec{B\Gamma}=\vec{\Gamma M}$

9. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ και Κ, Λ, Μ. Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AK}+\vec{B\Lambda}+\vec{\Gamma M}=\vec{AM}+\vec{BK}+\vec{\Gamma\Lambda}$ ii. $\vec{A\Lambda}-\vec{\Gamma K}=\vec{B\Gamma}+\vec{K\Lambda}-\vec{BA}$

10. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Αν ισχύει: $\vec{AM}-\vec{\Delta B}=\vec{M\Delta}-\vec{BA}+\vec{B\Gamma}$, να δείξετε ότι το Μ είναι μέσον του ΒΓ.

11. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Μ, για το οποίο ισχύει:

$$\vec{MA}+\vec{M\Gamma}=\vec{MB}+\vec{M\Delta}$$

Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

12. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο, για το οποίο ισχύει:

$$\vec{A\Gamma}+\vec{BO}=\vec{B\Delta}-\vec{\Gamma\Delta}$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Α συμπίπτουν.

Β1. Τριγωνική ανισότητα

13. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

i. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και $|\vec{\beta}|=2$, να δείξετε ότι

$$1\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le 3$$

ii. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}|=5$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}|\le 10$.

iii. Αν $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\gamma}|=5$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\ge 3$.

iv. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}-\vec{\beta}|=5$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|\ge 2$.

v. Αν $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=3$, να δείξετε ότι $2\le|\vec{\beta}|\le 4$.

14. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=5$, $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=2$. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\ne\vec{0}$$

Β2. Ομόρροπα - Αντίρροπα διανύσματα

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

i. Αν $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|=6$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=9$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

ii. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|+2$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le 2$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$