

## Αναπτύγματα ταυτοτήτων

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $(x+1)^2$

β.  $(x+7)^2$

γ.  $(x-5)^2$

δ.  $(y-1)^2$

ε.  $(2x+3)^2$

στ.  $(3y-2)^2$

ζ.  $(5\alpha-2\beta)^2$

η.  $(x^2+5)^2$

θ.  $(3x^2-1)^2$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

β.  $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2$

γ.  $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $(x+2)^3$

β.  $(x-3)^3$

γ.  $(2x-1)^3$

δ.  $(x^2-4)^3$

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $(x+3y+1)^2$

β.  $(x^2+x+1)^2$

5. Να βρείτε τα γινόμενα:

α.  $(x-1)\cdot(x+1)$

β.  $(x+3)\cdot(x-3)$

γ.  $(3x+2)\cdot(3x-2)$

δ.  $(5x-7)\cdot(5x+7)$

ε.  $(3x^2-5)\cdot(3x^2+5)$

στ.  $\left(y^2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(y^2+\frac{2}{3}\right)$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $(5+\sqrt{2})^2$

β.  $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $[-(\lambda-1)]^2$

β.  $(-3x-2)^2$

γ.  $(-3x+1)^2$

δ.  $(-4x+1)^3$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α.  $(5x-3y+1)^2$

β.  $(2\alpha-\beta-3\gamma)^2$

γ.  $(x^2-x-1)^2$

9. Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $x-x(x-1)-(x-2)^2$

β.  $x^3-3x(2x-1)-(x-1)^3$

γ.  $(x-2)(3x-1)-(x-1)(x+1)$

δ.  $x^2-2x(1-x)-(2x-1)^2$

ε.  $2(x-5)^2-(3x-2)(3x+2)$

στ.  $8x(x-1)(x+1)-(2x-1)^3$

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $(3x - 2)^2 - x(x - 1)(x + 1)$

β.  $1 - 2x(-x + 1) - (3x - 1)^2$

γ.  $x^3 - (3x - 2)(3x + 2) - (1 - 2x)^2$

δ.  $1 - 8x^2(x - 2) - (2x - 1)^3$

ε.  $(x^2 - x + 1)^2 - x^2(x^2 + 3)$

στ.  $x^5 - (-x - 2)(x - 2) - x(-x^2 + 1)^2$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $(7x - 2)^2 - (2x - 3) \cdot (x - 5)$

β.  $(x + 5)^2 - (3x - 1)^2 + 8x^2$

γ.  $(3x - 1)^2 - x(5 + 2x)(2x - 5)$

δ.  $(3x + 2)^2 - 3x(x - 2)(x + 2) - x(2x - 1)^2$

ε.  $x^3 - (x - 1)^3 - 3x(x - 2)$

στ.  $-10x^2 + 2(x + 3)^3 - (2x - 1)^2$

12. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α.  $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$

β.  $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

γ.  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

δ.  $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 - 6\alpha^2\beta = 2\beta^3$

ε.  $(\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2 = 4$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α.  $(2x - 1)^2 - 3x(x - 1) + 3x = (x + 1)^2$

β.  $(\alpha^2 - 3)^2 - \alpha(\alpha - 1) \cdot (\alpha - 5) = (\alpha - 1)(\alpha^3 - 5) + 4$

γ.  $(\alpha^2 + 1) \cdot (x^2 + 4) = (\alpha x + 2)^2 + (x - 2\alpha)^2$

δ.  $(x^2 - 1) \cdot (\alpha^2 - 9) + (3x - \alpha)^2 = (\alpha x - 3)^2$

14. Να βρείτε τη διακρίνουσα των τριωνύμων:

α.  $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 2$

β.  $\lambda x^2 - (2\lambda - 1)x - \lambda + 2$

γ.  $(\lambda + 1)x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda - 1$

δ.  $\lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x - \lambda + 1$

15. α. Να δείξετε ότι  $\alpha \cdot (\alpha - 2) - (\alpha - 1)^2 = -1$ .

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $2022 \cdot 2020 - 2021^2$ .

16. α. Να αποδείξετε ότι  $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1) = x^8 - 1$ .

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10.001$ .

17. α. Να δείξετε ότι  $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$ .

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2$ .

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

**Έκφραση των παραστάσεων:  $a^2 + b^2$ ,  $a^3 \pm b^3$   
συναρτήσει των  $a \pm b$  και  $ab$**

**18.** Αν  $a + b = -3$  και  $ab = -4$ , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$       β.  $a^2 + b^2$       γ.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$       δ.  $(a - b)^{20}$       ε.  $a^3 + b^3$

**19.** Αν  $x - \frac{1}{x} = 2$ , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α.  $x^2 + \frac{1}{x^2}$       β.  $x^3 - \frac{1}{x^3}$       γ.  $x^5 - \frac{1}{x^5}$

### Ταυτότητες υπό συνθήκη

**20.** Αν  $a + b + \gamma = 2$  και  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\gamma} = 0$ , να δείξετε ότι:

α.  $ab + b\gamma + \gamma a = 0$       β.  $a^2 + b^2 + \gamma^2 = 4$

**21.** Αν  $a + b + \gamma = 3$  και  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{ab\gamma}$ , να δείξετε ότι:

α.  $ab + b\gamma + \gamma a = 1$       β.  $a^2 + b^2 + \gamma^2 = 7$

**22.** Να δείξετε ότι:

α.  $(a - b)^3 + (b - \gamma)^3 + (\gamma - a)^3 = 3(a - b) \cdot (b - \gamma) \cdot (\gamma - a)$

β.  $x^3 + (2x - y)^3 + (y - 3x)^3 = 3x(2x - y)(y - 3x)$

γ. Αν  $x + y + z = a$ , τότε

$$(a - 3x)^3 + (a - 3y)^3 + (a - 3z)^3 = 3(a - 3x) \cdot (a - 3y) \cdot (a - 3z)$$

δ.  $(2x - 1)^3 + (x - 3)^3 - (3x - 4)^3 = -3(2x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (3x - 4)$

**23.** Αν  $a + b + \gamma = 0$ , να δείξετε ότι  $\frac{a^2}{b\gamma} + \frac{b^2}{\gamma a} + \frac{\gamma^2}{ab} = 3$ .

### Απαγωγή σε άτοπο

**24.** Να δείξετε ότι:

α. Αν  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ , τότε  $b \neq 2$ .

β. Αν  $a^2 > 0$ , τότε  $a \neq 0$ .

**25.** Να δείξετε ότι:

α. Αν  $a$  ρητός και  $b$  άρρητος, τότε  $a - b$  άρρητος.

β. Αν  $a$  άρρητος και  $b$  ρητός με  $b \neq 0$ , τότε  $\frac{a}{b}$  άρρητος.

26. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις δεν είναι αληθείς.
- α.  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$       β.  $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
- γ. Αν το άθροισμα  $\alpha + \beta$  δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος αριθμός, τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι άρτιοι.
- δ. Το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta$  δύο άρρητων αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$  είναι άρρητος αριθμός.

Γενικές

27. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4.
28. Αν η περίμετρος Π ενός ορθογωνίου με διαστάσεις  $a, \beta$  είναι 10 και το εμβαδόν του  $\delta$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά τη διαγώνιο του ορθογωνίου.
29. α. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - \beta)^2}{2} = \alpha\beta$ .
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει διαγώνιο  $\delta = 5$  cm και οι διαστάσεις του  $a, \beta$  διαφέρουν κατά 1 cm.
30. Αν  $x + y = 5$  και  $x^3 + y^3 = 95$ , να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων  $A = x^2 + y^2 - xy$  και  $B = (x - y)^2$
31. α. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $K = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3$ .
- β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $A = 200.004^3 - 199.996^3 - 24 \cdot 200.000^2 - 64$  είναι κύβος ακεραίου. Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε "Ο Ευκλείδης" 2008 - Α' Λυκείου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

32. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
- α.  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$       β.  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$
- γ.  $(\beta + \alpha) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$       δ.  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3$
- ε.  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- στ.  $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.