

Α' ΟΜΑΔΑΣ

Κοινός παράγοντας

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3x + 3y$

β. $7x - 7y$

γ. $2x + 6$

δ. $3x - 12$

ε. $4x + 6$

στ. $9x - 6$

ζ. $3x + 3$

η. $10x - 2$

θ. $15x - 5$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 3x$

β. $x^2 - 2xy$

γ. $x^3 - 3x^2$

δ. $2x^2 + 6x$

ε. $6x^2 - 8x$

στ. $14x^3 - 21x^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + x$

β. $x^2 - x$

γ. $x^3 + x$

δ. $x^3 - x^2 + x$

ε. $6x^2 + 3x$

στ. $6x^4 + 2x^2$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x(2x - 1) + 3(2x - 1)$

β. $x(2x - 1) - 3(2x - 1)$

γ. $(x - 1)^2 + 3(x - 1)$

δ. $(x - 2)^2 + 3(2 - x)(x + 1)$

ε. $(5x + 2) \cdot (3x - 1) + 5x + 2$

στ. $x(2x - 1) - 2x + 1$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x(2x - 1) + 6x - 3$

β. $(x - 2)^2 + 3x - 6$

γ. $x(2x - 1) - 6x + 3$

δ. $(x - 3)^2 - 2x + 6$

ε. $(2x - 1)^2 + 2x - 1$

στ. $(3x - 2)^2 - 3x + 2$

ζ. $[-(\lambda - 1)]^2 - 4(1 - \lambda)$

η. $[-(2\lambda - 1)]^2 + 4(1 - 2\lambda)$

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $ax - ay + bx - by$

β. $ax - ay - bx + by$

γ. $ax - ay + x - y$

δ. $ax - ay - x + y$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

β. $x^3 - x^2 + x - 1$

γ. $xy + x + y + 1$

δ. $xy - x - y + 1$

Διαφορά τετραγώνων

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 - 9$

β. $x^2 - 4$

γ. $x^2 - 25$

δ. $x^2 - 1$

ε. $4x^2 - 49$

στ. $49y^2 - 16$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 - \frac{1}{x^2}$

β. $y^2 - \frac{1}{4}$

γ. $9x^2 - \frac{25}{4}$

δ. $x^4 - 81$

ε. $(5x - 1)^2 - 9$

στ. $x^2 - 3$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $5x^2 - 20$

β. $x^3 - 4x$

γ. $x^4 - 16x^2$

δ. $2x^3 - 18x$

ε. $4x^3 - x$

στ. $3x^4 - 12x^2$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

β. $4x^3 - 8x^2 - x + 2$

γ. $(2x - 1) \cdot (x + 3) - x^2 + 9$

δ. $x^3 - 2x^2 + (2x - 1)(2 - x)$

12. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $101^2 - 99^2$

β. $\frac{(11,36)^2 - (7,52)^2}{3,84}$

Άθροισμα ή Διαφορά κύβων

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 + 8$

β. $x^3 - 1$

γ. $27x^3 - 125$

δ. $(2x - 1)^3 - x^3$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^4 - x$

β. $2x^5 - 16x^2$

γ. $x^4 - 2x^3 - x + 2$

δ. $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$

ε. $x^7 - x^4 - x^3 + 1$

Ανάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 6x + 9$

β. $y^2 - 10y + 25$

γ. $x^2 - 4x + 4$

δ. $x^2 - 2x + 1$

ε. $x^2 - 8x + 16$

στ. $x^2 + x + \frac{1}{4}$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $4x^2 - 4x + 1$

β. $9x^2 - 12x + 4$

γ. $25x^2 - 10x + 1$

δ. $x^4 - 2x^2 + 1$

ε. $x^4 - 8x^2 + 16$

στ. $16x^4 - 8x^2 + 1$

17. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3x^2 + 6x + 3$

β. $2x^3 - 12x^2 + 18x$

γ. $4x^3 - x^2 - 4x^4$

δ. $x^2 + 2x + 1 - y^2$

ε. $x^2 - y^2 + 6y - 9$

στ. $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

Ανάπτυγμα κύβου διωνύμου

18. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

β. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου με εύρεση των ριζών του

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3x^2 + x - 2$

β. $2x^2 + x - 1$

γ. $x^2 - x - 2$

δ. $x^2 - 6x + 9$

ε. $4x^2 - 4x + 1$

στ. $x^2 + x + 1$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής: $x^2 + \beta x + \gamma$

20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 5x + 6$

β. $x^2 - 3x + 2$

γ. $x^2 - 8x + 15$

δ. $x^2 + x - 6$

ε. $x^2 - x - 6$

στ. $x^2 + x - 2$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου με διάσπαση όρου

21. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α. $4x^2 - 9x + 5$

β. $2x^2 - 5x + 3$

γ. $7x^2 - 13x + 6$

22. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3x^2 + 5xy + 2y^2$

β. $2x^2 - 3xy + y^2$

γ. $3x^2 - xy - 2y^2$

Εφαρμογές Παραγοντοποίησης - Εξισώσεις

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 - x = 0$

β. $3x^2 - 6x = 0$

γ. $x^2 - 1 = 0$

δ. $x^3 = x$

ε. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

στ. $3x^2 - 5x + 2 = 0$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0$

β. $(x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0$

γ. $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$

δ. $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

25. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{x^2 + 2x}{3x + 6}$

β. $\frac{3x^2 - x}{6x - 2}$

γ. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

δ. $\frac{3x - x^2}{x^2 - 9}$

ε. $\frac{x^2 - 25}{10x - 2x^2}$

στ. $\frac{1 - 9x^2}{6x^2 - 2x}$

26. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$

β. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

γ. $\frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1}$

δ. $\frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

ε. $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

στ. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

27. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{x^3 - x}{x^2 - x}$

β. $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$

γ. $\frac{x^4 - x}{x^2 - x}$

δ. $\frac{8x^3 - 2x}{2x^2 + x}$

ε. $\frac{x^5 - 16x}{x^3 + 4x}$

στ. $\frac{(x+1)^3 - 1}{x}$

ζ. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^3 - x^2}{(x-1)^3}$

η. $\frac{x-1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

28. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x}{x^2 - 4}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση.

29. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 9}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

Πράξεις

30. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$

β. $\frac{3}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha\beta}$

γ. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x}$

31. Να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} : \left(\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} + \beta \right) = 1$.

32. α. Να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} - \alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{1002^3 + 8}{1004} - 2004$.

Αναλογίες - Ιδιότητες Αναλογιών

33. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{6\alpha - 3\beta}{5\beta}$

β. $\frac{5\alpha}{3\alpha + \beta}$

γ. $\frac{3\alpha - 5\beta}{2\alpha - \beta}$

34. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β , γ , δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

35. α. Αν ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 24$ και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$, να βρείτε τους α , β , γ .

β. Αν για τους αριθμούς x , y , z ισχύει $\frac{x}{2y} = \frac{2y}{3z} = \frac{3z}{x}$, να δείξετε ότι $x = 2y = 3z$.

36. Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι των 4, 2, 3 και ισχύει η σχέση

$$3\alpha - 2\beta - \gamma = -10,$$

να βρείτε τους α , β , γ .

37. Αν $x + y = xy + 1$, να δείξετε ότι $x = 1$ ή $y = 1$.

38. Αν $x^2 - y^2 - 2x = -1$, να δείξετε ότι $y = x - 1$ ή $y = -x + 1$.

39. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha^{-1} - \beta^{-1})^{-2}$

β. $\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)^{-1} \cdot \frac{\alpha^{-2} - \beta^{-2}}{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}$

40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(3x - 1)^3 + (x - 2)^3 + (3 - 4x)^3 = 0$

β. $(3x - 1)^3 = x^3 + (2x - 1)^3$

γ. $27(x - 2)^3 + 8x^3 = (5x - 6)^3$

41. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^4 - 5x^2 + 4$

β. $x^4 - 10x^2 + 9$

γ. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

42. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^4 + 4y^4$

β. $x^4 + 9y^4 - 10x^2y^2$

Γενικές

43. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^3 - 3x(1 - x)$ και η παράσταση $A = \frac{P(x)}{x^2 - 1}$.

α. Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 1$.

β. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A και στη συνέχεια, να την απλοποιήσετε.

γ. Να δείξετε ότι $A - x = \frac{1}{x + 1}$.

δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{999^3 - 1}{999^2 - 1} - 999$.

44. Δίνονται οι μη μηδενικοί ακέραιοι α , β , για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha - 2\beta$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 2\beta$ ή $\alpha = 2\beta + 1$.

β. Αν ο αριθμός α είναι άρτιος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{3\alpha + 5\beta}{2\alpha - \beta}$$

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν, για τρεις πραγματικούς αριθμούς α , β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
- α.** $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ **β.** $\alpha^v = \beta^v \Leftrightarrow \alpha = \beta$, $v \in \mathbb{N}^+$
- γ.** $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ **δ.** $\alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- ε.** $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x - 1)^2 - 3x(x - 1) - 1$.

B1. Να δείξετε ότι $P(x) = x^2 - x$.

B2. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$.

B3. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 1}{P(x)}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 1)^3 - 3(x - 1)^2 - 9x - 6$.

Γ1. Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 8$.

Θεωρούμε επιπλέον την παράσταση $A = \frac{P(x)}{x^2 - 4}$.

Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Γ3. Να δείξετε ότι $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} - x = \frac{4}{x + 2}$, για κάθε $x \neq \pm 2$.

Γ4. Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{998^3 - 8}{998^2 - 4} - 998$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α , β με $\alpha \neq \beta$, για τους οποίους ισχύει: $\frac{1 + \alpha^2}{1 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Δ1. Να δείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίστροφοι.

Δ2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{(\alpha^3 \beta^{-2})^4 \beta^{-12}}{(\alpha \beta)^{-1} (-\alpha)^{32}}$.

Δ3. Αν επιπλέον ισχύει $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 + \beta^2$.