

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Υπολογισμός συμμετρικών παραστάσεων

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2$ β. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ γ. $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - x - 5 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)$ β. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
 γ. $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ δ. $x_1^2 x_2 - x_1 + 1 + x_1 x_2^2 - x_2$

3. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 1 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x_1^2 + x_2^2$ β. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
 γ. $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$ δ. $(x_1 - x_2)^2$

4. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - x - 1 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ β. $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ γ. $x_1^2 + x_2^2$
 δ. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ε. $(x_1 - x_2)^2$

5. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ β. $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$ γ. $\frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2}$
 δ. $(3x_1 - x_2)(3x_2 - x_1)$

11. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β. Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες να ισχύει:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$, (1) .

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες άνισες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) , να βρείτε το λ , ώστε $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

14. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + x - 2 = 0$, (1) .

α. Να βρείτε το λ , για τις οποίες η (1) είναι δευτέρου βαθμού και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1, x_2 οι πραγματικές και άνισες ρίζες της (1) , να βρείτε το λ , ώστε:

$$(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = \frac{1}{2}$$

B' ΟΜΑΔΑΣ

15. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $x_1^2 + x_2^2$

β. $x_1^3 + x_2^3$

γ. $x_1^4 + x_2^4$

δ. $x_1^5 + x_2^5$

ε. $(x_1 - x_2)^{20}$

στ. $|x_1 - x_2|$

ζ. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

η. $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$

16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3\lambda x - 27 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και το λ .

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, (1).

α. Να βρείτε το λ , ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β. Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 3x_2$, να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το λ .

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -4$$

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πηλίκο των ριζών της εξίσωσης είναι 2.

Πρόσημο ριζών

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2(\lambda - 3) = 0$, (1).

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει λύση, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες:

i. ετερόσημες

ii. ομόσημες

iii. θετικές

iv. αρνητικές

20. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A και B.

21. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 3 = 0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς:

α. $x_1 + 2, x_2 + 2$

β. $2x_1, 2x_2$

γ. $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$

δ. x_1^2, x_2^2

ε. $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$

στ. x_1^3, x_2^3

22. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς:

α. $x_1^2 x_2, x_1 x_2^2$

β. $2x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1$

γ. $\frac{x_1}{x_2 - 1}, \frac{x_2}{x_1 - 1}$

23. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -15$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

24. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, τότε:

i. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

ii. $x_1 x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

β. Αν $x_1 + x_2 = S$ και $x_1 x_2 = P$, τότε η εξίσωση $x^2 + Sx + P = 0$ έχει ρίζες τις x_1 και x_2 .

γ. Η εξίσωση $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς α και β .

δ. Αν $\gamma < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

ε. Αν η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$, (1) έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$ και $\gamma > 0$, τότε έχει δύο ρίζες ομόσημες.

στ. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες οι οποίες είναι:

i. αντίθετες, τότε $\beta = 0$

ii. αντίστροφες, τότε $\alpha = \gamma$.

α.ι.	α.ii.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.ι.	στ.ii.