

Εξισώσεις της μορφής $\alpha[f(x)]^2 + \beta f(x) + \gamma = 0$

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(2x-1)^2 - 3(2x-1) - 4 = 0$

β. $(x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 3 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 + |x| - 2 = 0$

β. $x^2 - |x| - 6 = 0$

γ. $9x^2 - 6|x| + 1 = 0$

δ. $5x^2 = 3|x| - 4$

ε. $x^2 - |-x| - \frac{1}{2} = 0$

στ. $3x^2 - 2\sqrt{x^2} = 1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(2x-1)^2 + 3|2x-1| - 4 = 0$

β. $(x^2-1)^2 - 2|x^2-1| - 3 = 0$

γ. $(x-3)^2 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 6$

δ. $(3x-2)^2 - \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = 2$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

β. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

γ. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

δ. $3x^4 + x^2 + 1 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

β. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

β. $2x - \sqrt{x} - 1 = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|x^2 - x - 1| = 1$

β. $|x^2 - 5x + 5| = 1$

γ. $|x^2 - x - 1| = |x - 2|$

δ. $x^2 + 4x - 9 = 4|x|$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 0$

β. $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 - 2x + |x - 1| - 5 = 0$

β. $4x^2 - 4x - |2x - 1| + 2 = 0$

γ. $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 2 = 0$

δ. $(3x - 2)^4 - 5(3x - 2)^2 + 4 = 0$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$

β. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(x^3 - 1)^2 - \sqrt{x^6 - 2x^3 + 1} - 2 = 0$

β. $(x^5 - 1)^2 + \sqrt{x^{10} - 2x^5 + 1} - 2 = 0$

12. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 5x + a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι, αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{1}{2x^2 - x} + 2x^2 - x = 2$

β. $\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{2} = -1$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{2x - 1}{x - 2} + \frac{x - 2}{2x - 1} - \frac{5}{2} = 0$

β. $\frac{2x^2 - 1}{x^2} + \frac{x^2}{2x^2 - 1} - 2 = 0$

15. α. Αν $x - \frac{1}{x} = y$, να δείξετε ότι $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x} = 5$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\sqrt{x + 6} = x$

β. $\sqrt{x} = x - 2$

17. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$.

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $3x_1 + 3x_2 - 2x_1x_2$

ii. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

i. $|3\lambda - 4| = x_1 + x_2$

ii. $\lambda^3 + x_1x_2 = 0$

γ. Να κατασκευάσετε την εξίσωση με ρίζες τις $2x_1$ και $2x_2$.

18. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{1}{2}x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ με παράμετρο το λ .

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:

β. Ισχύει:

i. $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 4$

ii. $x_1^2 + x_2^2 = 12$

iii. $(\lambda + 1)^2 = |x_1 + x_2| + 3$

γ. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

i. αντίθετες

ii. θετικές

19. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, με παράμετρο το λ .

α. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 , να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

β. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = \lambda^2$

γ. $(x_1 + x_2)^3 + 64x_1x_2 = 0$

δ. $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4\lambda + 1} = \lambda + 1$

ε. $\lambda^4 = 5x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2$

στ. Η μία ρίζα είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ). Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

α. Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{\alpha}$.

β. Αν η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, τότε $\Delta > 0$.

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$.

δ. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες τουλάχιστον, τότε έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ε. Αν η εξίσωση είναι αδύνατη, τότε $\Delta < 0$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Να λύσετε την εξίσωση $5x^2 = 3x + 2$.

Έστω ρ η ακέραια ρίζα της εξίσωσης.

B2. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = \rho$. **B3.** Να λύσετε την εξίσωση $|3x - \rho| = 2|x|$.

B4. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 8\rho = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 3\lambda x + \lambda^2 = 0$ με παράμετρο το λ .

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

Γ2. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -6$

Γ3. $x_1 x_2 - |x_1 + x_2| = 4$

Γ4. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 1 = 0$, $\lambda \neq 0$ με παράμετρο το λ .

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης.

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η απόσταση των ριζών της είναι 2λ .

Δ4. Να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει $2(x_1 + x_2)^2 - 9\sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}} + 2 = -10$.