

Πρόσημο τιμών τριωνύμου

1. Να κάνετε τον πίνακα προσημών των τριωνύμων:

α. $5x^2 - 3x - 2$

β. $-x^2 + x + 2$

γ. $4x^2 - 4$

δ. $-x^2 + 9$

ε. $x^2 - 3x$

στ. $x - 2x^2$

2. Να κάνετε τον πίνακα προσημών των τριωνύμων:

α. $4x^2 - 4x + 1$

β. $-x^2 + 2x - 1$

γ. $x^2 + x + 2$

δ. $-2x^2 + x - 1$

ε. $x^2 + 3$

στ. $-x^2 - 1$

Ανισώσεις

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - 5x + 6 > 0$

β. $3x^2 - x < 2$

γ. $x - 5x^2 \geq -4$

δ. $x(1 - 2x) > -1$

ε. $(x - 1)^2 > 5 - x(2x + 1)$

στ. $\frac{x-1}{5} < \frac{x^2-1}{2}$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 < x$

β. $\frac{3x}{2} \leq x^2$

γ. $(x - 1)^2 \leq x + 1$

δ. $x^2 < 1$

ε. $4x^2 > 9$

στ. $x^2 < 3$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - 3x + 2 < 0$

β. $x^2 - x - 2 > 0$

γ. $-x^2 < x - 6$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

β. $4x^2 > 4x - 1$

γ. $6x - 1 \geq 9x^2$

δ. $-x^2 < 2x + 1$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - x + 1 > 0$

β. $3x^2 > 2x - 1$

γ. $3x - 1 < 5x^2$

8. Έστω το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου.

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

γ. Να κάνετε τον πίνακα προσημών του τριωνύμου.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 < 7x - 2$.

Κοινές λύσεις ανισώσεων

9. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α. $1 - 2x < 0$ και $x^2 \leq 11x - 10$

β. $2x^2 < 1$ και $x(1 - 2x) \leq -1$

γ. $x^2 < 16$ και $x^2 > 3x$ και $x^2 > 4x - 4$

10. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

α. $3x < 2x^2 - x \leq 1$

β. $3x < x^2 < 4$

γ. $x \leq x^2 \leq 1$

δ. $x - 1 < x^2 \leq 6x - 9$

11. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις:

α. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

β. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

γ. $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

δ. $y = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$

Εύρεση προσήμου συνάρτησης

12. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x^2 - 101x + 100$ και στη συνέχεια, να βρείτε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου, για:

α. $x = 89$

β. $x = \frac{1}{7}$

γ. $x = 123$

13. Δίνεται η ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$, (1).

α. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί: $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{123}$ και $\sqrt{5}$ είναι λύσεις της ανίσωσης (1).

γ. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\kappa = 789^2 - 3 \cdot 789 + 2$.

δ. Αν $\lambda \in (2, 3)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $(\lambda - 1)^2 - 3|\lambda - 1| + 2$.

Παραμετρικές εξισώσεις

14. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

α. $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$

β. $(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x = \lambda + 1$

- 15.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του λ .
- α.** $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$ **β.** $(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda = 0, \quad \lambda \neq 1$
- 16.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (3\lambda - 2)x - 3\lambda + 2 = 0$.
- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.
- β.** Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < -9$.
- 17.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$.
- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.
- β.** Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $x_1^2 + x_2^2 > 3$.
- 18.** Να δείξετε ότι:
- α.** $x^2 - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **β.** $y^2 - 2y + 2 > 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$
- γ.** $\lambda^2 > \lambda - 2$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ **δ.** $3\lambda - 2 < 2\lambda^2$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- ε.** $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- 19.** Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α.** $x^2 - \lambda x + \lambda - 3 = 0$ **β.** $x^2 + (3\lambda + 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$

Ανισώσεις και απόλυτες τιμές

- 20.** Να λύσετε τις ανισώσεις:
- α.** $x^2 - 5|x| + 4 < 0$ **β.** $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 > 0$
- γ.** $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ **δ.** $x^4 - 8x^2 - 9 > 0$
- ε.** $x - 5\sqrt{x} + 4 < 0$ **στ.** $x - 8\sqrt{x} - 9 > 0$
- 21.** Να λύσετε τις ανισώσεις:
- α.** $|x^2 - 3x + 1| > 1$ **β.** $|x^2 - x - 4| < 2$ **γ.** $|x^2 - x| > 2$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι συναρτήσεις:

α. $y = \sqrt{x^2 - 3|x| + 2}$

β. $y = \sqrt{2|x| + 1 - 3x^2}$

γ. $y = \sqrt{3 + 2x^2 - x^4}$

δ. $y = \sqrt{3x - 2\sqrt{x} - 1}$

23. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x^2 - 4| < x^2 - 3x + 2$

β. $|x^2 - x| > x^2 - x - 2$

γ. $|x^2 - 3x + 2| > x^2 + x - 2$

δ. $\sqrt{3x^2 + 1} > 2|x|$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|3x^2 - 5| = x^2 - 1$

β. $|x^2 - 3| = x - x^2$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|x^2 - 1| = x^2 - 1$

β. $|x^2 - x| = x - x^2$

γ. $|x^2 - x + 1| + x^2 = 3x + 1$

δ. $|x^2 - 4x + 3| - 2x^2 + x + 1 = 0$

Παραμετρικές ανισώσεις

26. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3$, $\lambda \neq 0$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

27. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το τριώνυμο $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x - \lambda$, $\lambda \neq 1$ είναι αρνητικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

28. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες οι τιμές του τριωνύμου

$$(2\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1, \quad \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ είναι θετικές, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

29. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 1 > 0, \quad \lambda \neq 0$

β. $(3\lambda - 1)x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda > 0, \quad \lambda \neq -\frac{1}{3}$

30. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύουν:

α. $(\lambda+1)x^2 + (\lambda+1)x + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $(\lambda-2)x^2 + (\lambda-2)x - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

31. α. Αν $|\lambda| > \sqrt{3}$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $-4x^2 + 8x - \lambda^2 - 1$ είναι αρνητικές.

β. Αν $0 < \alpha < 3$, να δείξετε ότι οι τιμές του τριωνύμου $x^2 - \alpha x + \alpha$ είναι θετικές, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι οι τιμές του τριωνύμου $\alpha x^2 - 2\alpha x + \beta$ είναι θετικές, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32. α. Να δείξετε ότι οι τιμές του τριωνύμου $x^2 - (\lambda+2)x + \lambda^2 + 2$ είναι θετικές, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $x^2 - (2\lambda-1)x + 2\lambda^2 + 1 > 0$

ii. $x^2 - \lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$

33. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ για το οποίο ισχύουν:

• $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• $\alpha + \beta + \gamma > 0$

Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$.

34. Έστω το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + 1$ για το οποίο ισχύει $\beta^2 < 3a$.

Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γενικές

35. α. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 < 5x - 4$

ii. $|x-1| < 2$

β. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

γ. Αν κ η κοινή ακέραια λύση των παραπάνω ανισώσεων, να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 > \frac{\kappa}{2}$

ii. $x^2 > \kappa x$

36. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2\lambda x - \lambda + 2 = 0$ με παράμετρο το λ .

- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.
β. Αν οι αριθμοί x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 > 0$.
γ. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει

$$x^2 - 2\lambda x - \lambda + 2 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

37. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$ με παράμετρο το $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $x_1^2 + x_2^2 > 6$.
γ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ακέραιου λ , για την οποία οι ρίζες της εξίσωσης είναι θετικές.
δ. Για την παραπάνω ακέραια τιμή του λ , να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 - |x| < 2\lambda$$

38. Έστω η ανίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda \geq 0$, η οποία αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ .
β. Να λύσετε την εξίσωση $|x^2 - \lambda^2| = x^2 - 5x + 6$.
γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \sqrt{\lambda x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$$

39. Δίνεται το τριώνυμο:

$$(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6, \quad \lambda \neq 2$$

- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το τριώνυμο είναι θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda$, $\lambda \neq 1$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:

α. Η ανίσωση $(\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda < 0$, $\lambda \neq 1$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες.

γ. Ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \lambda$, όπου x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

41. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

Έστω το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ και Δ η διακρίνουσά του.

α. Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) οι ρίζες του τριωνύμου, τότε αυτό είναι ομόσημο του a , για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

β. Αν $\Delta < 0$ και $a > 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Το τριώνυμο γίνεται ετερόσημο του a , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

δ. Αν $\Delta = 0$ και $a < 0$, τότε $ax^2 + bx + \gamma < 0$, για κάθε $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$.

α.	
β.	
γ.	
δ.	

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να γράψετε τις μορφές του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσάς του Δ .
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).
Έστω το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ και Δ η διακρίνουσά του.
- α.** Αν το τριώνυμο έχει ρίζες τις x_1, x_2 , τότε ισχύει: $ax^2 + bx + \gamma = (x - x_1)(x - x_2)$.
- β.** Αν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του a , για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός των ριζών.
- γ.** Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του a , για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ.** Το τριώνυμο είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $a < 0$ και $\Delta < 0$.
- ε.** Αν $\Delta < 0$, τότε ισχύει $ax^2 + bx + \gamma = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right]$.

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 > 0$.
- B2.** Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq 3$.
- B3.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες έχει ρίζες πραγματικές.
- Γ2.** Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:
- α.** $|x_1 + x_2 - x_1 x_2| \geq 3$ **β.** $x_1^2 + x_2^2 < 4\lambda + 22$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3$, $\lambda \neq 0$.

- Δ1.** Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η ανίσωση $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3 > 0$, $\lambda \neq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Έστω κ η ακέραια τιμή του λ του προηγούμενου ερωτήματος.
- Δ2.** Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3|x| + 2\kappa < 0$.
- Δ3.** Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 1}$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $|A| \leq \frac{1}{2}$.