

Τιμές συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 - α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - β. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(0)$, $f(1)$, $f(3a)$, $f(x-2)$, $f(f(1))$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3ax$, $x \in \mathbb{R}$ με $f(2) = -2$.
 - α. Να δείξετε ότι $a = 1$.
 - β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:
 - i. $f(-1) = \lambda^2 - 1$
 - ii. $f(\lambda - 1) = -2$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + \beta$ με $f(0) = -1$ και $f(-1) = -4$.
Να δείξετε ότι $a = -4$ και $\beta = -1$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, 2) \\ x^2 - 1, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$.
 - α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - β. Να βρείτε τις τιμές: $f(1)$, $f(3)$, $f(2)$.
 - γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = f(0)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{αν } x \leq -1 \\ \frac{3}{x+1}, & \text{αν } -1 < x < 3 \\ 1, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι:
 - α. $f(0) + |f(-1)| + f(2021) = 8$
 - β. $f(\sqrt[3]{8}) + f(\pi) = 2$
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$.
Να βρείτε τις τιμές:
 - α. $f\left(-\frac{2}{3}\right)$
 - β. $f(\sqrt{2})$
 - γ. $f(\pi)$
 - δ. $f(\sqrt{4})$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-\alpha}{x-2} - 1, & \text{αν } 0 < x < 2 \\ \alpha\sqrt{-x} + \beta, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Αν ισχύουν $f(1) = -2$ και $f(0) + f(-1) = 6$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Πεδίο ορισμού συνάρτησης

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f, όταν:

α. $f(x) = 2x^3 - x + 3$

β. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

γ. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

δ. $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

ε. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-x-1}$

στ. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f, όταν:

α. $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

β. $f(x) = \frac{2}{|x-1|-3}$

γ. $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

δ. $f(x) = \frac{1}{x^2-|x|}$

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f, όταν:

α. $f(x) = \sqrt{x-2}$

β. $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

γ. $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

δ. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$

ε. $f(x) = \sqrt{|x|^3-1}$

στ. $f(x) = \sqrt{|x+2|-1}$

11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f, όταν:

α. $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$

β. $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}$

γ. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

δ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

ε. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}-3}$

στ. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$

12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων και στη συνέχεια, να γράψετε τον τύπο της σε μορφή ρίζας.

α. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

β. $f(x) = (x-1)^{\frac{4}{5}}$

Συναρτήσεις και εξισώσεις - ανισώσεις

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 6$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -6$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-1) - f(3x) + 9x^2 - x < 4$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - ax - 1$ και $g(x) = x + \beta$ που έχουν ρίζες τους αριθμούς 1 και -1 αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τις τιμές των α , β .

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{3x+2}$, $x \in A$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$.

B' ΟΜΑΔΑΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f\left(\frac{2}{3}\right)$

β. $f(\sqrt{2})$

γ. $f(2,333\dots)$

δ. $f(\pi)$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f(\alpha^2)$

β. $f(\sqrt{2}-1)$

γ. $f(3-\pi)$

δ. $f(\sqrt{3}-2)$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 1 \\ x-1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f(\sqrt{2})$ β. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ γ. $f(\alpha^2 + 1)$ δ. $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, $\alpha > 1$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ x^2 - 3, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το $f(\sqrt{3})$ και να το γράψετε με ρητό παρονομαστή.

β. Να βρείτε το $f(\alpha^2 + 2)$.

γ. Αν $f(f(2)) = \lambda^{2021}$, τότε να βρείτε το λ .

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x-3, & x \leq 2 \\ 3x+2, & x > 2 \end{cases}$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 5$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να εξετάσετε, αν οι αριθμοί -2 και -3 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f(|x|)$ β. $f(-x^2)$, $x \neq 0$ γ. $f(\sqrt{x^2 + 1})$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές:

α. $f(-x^2)$ β. $f(x^2 + 1)$ γ. $f\left(\frac{1}{x}\right)$, όταν $x > 1$
 δ. $f(1-2x)$, όταν $x \leq 0$ ε. $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$, όταν $x > 0$

24. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

α. $f(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}$

β. $f(x) = \frac{x}{3x^2 - 2\lambda x + 3}$

25. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{|x| - x}$

β. $f(x) = \frac{x-2}{|x|-x}$

γ. $f(x) = \frac{1}{|x| - \sqrt{x}}$

δ. $f(x) = \sqrt{|x| - \sqrt{x}}$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 + \alpha|x| + 1}{2|x| - 1}$ με $f(-1) = 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = -4$.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x}{x-3}, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{\alpha x}{2} - 1, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 4f(-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του α .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(|x| + 2) = 3$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(1 - x^2) = 1$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 1, & 0 < x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$.

Να λύσετε:

α. Την εξίσωση $f\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = f(x^2 + 3)$.

β. Την εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right) = 5$ στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ. Την ανίσωση $f(3 - 2x) > 3$ στο διάστημα $(0, 1)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x$.

α. Να δείξετε ότι $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

β. Να βρείτε τις τιμές του γ , ώστε $f(x) \geq 1 - \gamma$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = -2$, να βρείτε το λ , ώστε:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{\lambda^3 + 94}{2}$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(5x + 4\alpha) + 3\beta$ για την οποία ισχύει:

$$f(\alpha) + f(\beta) + 9 = 8\alpha^2$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = -3$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 20x$.

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 9x$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9x^2 + \alpha\sqrt{x^2} + 1}{3|x| - 1}$ με $f(-1) = 2$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = -6$.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x - 1) < 3$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{3\sqrt{x} - 1}$ με $f(1) = 4$ και $f(4) = 7$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -1$.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^6) = 4$.

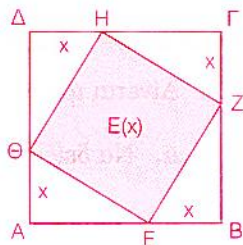
Προβλήματα

33. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$.

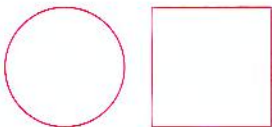
α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

34. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$,

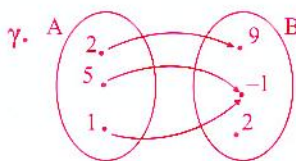
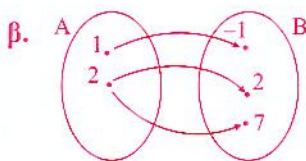
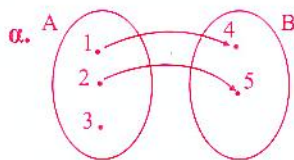


- α. να εκφράσετε το τετράγωνο της πλευράς EZ συναρτήσει του x ,
- β. να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνει 2 .
35. Ένα σύρμα μήκους 1 m κόβεται σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x\text{ m}$, κατασκευάζουμε κύκλο και με το άλλο τετράγωνο.
- α. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων, συναρτήσει του x .
- β. Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι $\frac{1}{16}$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

36. Α. Να εξετάσετε, ποια από τα παρακάτω βελοδιαγράμματα παριστάνουν συνάρτηση.



- Β. Έστω μία συνάρτηση f που παριστάνεται με το διπλανό βελοδιάγραμμα.

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

- α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \{ \dots \}$$

- β. Είναι $f(2) = \dots$, $f(0) = \dots$

- γ. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \{ \dots \}$.

