

2.4

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ – ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες.

i) $(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

ii) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

iii) $(-a - \beta)^2 = (a + \beta)^2$

iv) $(a - \beta)(a + \beta) = a^2 + \beta^2$

v) $x^2 - 4 = (x - 2)^2$

vi) $(x + 3)^2 = x^2 + 9$

vii) $(-a + \beta)^2 = (a - \beta)^2$

viii) $(a + \beta)^2 = a^2 + \beta^2$

ix) $(-a - \beta)^3 = -(a + \beta)^3$

x) $(x + a)(x + \beta) = x^2 + (a + \beta)x + a\beta$

2. Να υπολογισθούν τα τετράγωνα των αριθμών όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

$$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

$$31^2 = (\dots + \dots)^2 =$$

$$45^2 = (\dots + \dots)^2 =$$

$$53^2 = (\dots + \dots)^2 =$$

$$61^2 = (\dots + \dots)^2 =$$

3. Η παράσταση $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1)$ ισούται με:

A. $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

B. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 1$

Γ. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$

Δ. $x^4 - 3x^2 + 1$

4. Η παράσταση $(x + 3)(x + 8)$ ισούται με:

A. $x^2 - 11x + 24$

B. $x^2 + 3x + 8$

Γ. $x^2 + 8x + 3$

Δ. $x^2 + 11x + 24$

5. Η παράσταση $(x - 2)^2 + (x + 2)^2$ ισούται με:

A. $2x^2 - 8$

B. $8x$

Γ. $2x^2 + 8$

Δ. $-8x$

6. Η παράσταση $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$ ισούται με:

A. $-12x$

B. $12x$

Γ. $18x^2 + 2$

Δ. $18x^2 - 2$

7. Η παράσταση $(x - 1 + y - 2)(x - 1 - y + 2)$ ισούται με:

A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$

B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3$

Γ. $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$

Δ. $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3$

8. Η παράσταση $(3\alpha - 4\beta)(3\alpha + 4\beta) - (\beta - 5\alpha)(\beta + 5\alpha)$ ισούται με:

A. $34\alpha^2 - 17\beta^2$

B. $34\alpha^2 + 17\beta^2$

Γ. $34\beta^2 - 17\alpha^2$

Δ. $34\beta^2 + 17\alpha^2$

9. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 2xy + \dots$

ii) $(5y - \dots)^2 = 25y^2 - 40y\omega + \dots$

iii) $(x + \dots)^2 = x^2 + \beta x + \dots$

iv) $(\dots + 1)^2 = \dots + 2xy + \dots$

v) $(\dots + \dots)(2x - \dots) = 4x^2 - 1$

vi) $\left(\frac{1}{2}xy - \dots\right)(\dots + \dots) = \frac{1}{4}x^2y^2 - 1$

vii) $(\dots + \dots)^3 = \mu^3 + \dots + \dots + \nu^3$

viii) $(\dots + \dots)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \dots$

ix) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + \dots$

x) $(x + 2)(x + \dots) = x^2 + \dots + 6$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x + 4)^2$

ii) $(2x + 5)^2$

iii) $(4x + 3)^2$

iv) $(3x + 4)^2$

v) $(3\alpha + 4\beta)^2$

vi) $(3 + \alpha^2)^2$

vii) $(x^2 + 3y^2)^2$

viii) $(x + \alpha^2\beta^2)^2$

ix) $(\alpha\beta + xy)^2$

x) $(3\alpha^3 + 4\beta\gamma)^2$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

ii) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2$

iii) $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)^2$

iv) $\left(\frac{xy}{2} + \frac{\omega}{3}\right)^2$

$$\begin{array}{llll} \text{v)} \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)^2 & \text{vi)} \left(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}x^2\right)^2 & \text{vii)} \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 & \text{viii)} \left(3a^2 + \frac{1}{3\beta^2}\right)^2 \\ \text{ix)} \left(\frac{xy}{3} + \frac{a\beta}{2}\right)^2 & \text{x)} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{\beta^3}{5}\right)^2 & & \end{array}$$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} (4 - x)^2 & \text{ii)} (x - 5)^2 & \text{iii)} (3x - 7)^2 & \text{iv)} (7x - 3)^2 \\ \text{v)} (2a - 3\beta)^2 & \text{vi)} (3a\beta - 4xy)^2 & \text{vii)} (2a^3 - 5)^2 & \text{viii)} (x^2 - y^2)^2 \\ \text{ix)} (2a\beta - 3x^2y)^2 & \text{x)} (3a^2\beta - 2a\beta^2)^2 & & \end{array}$$

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \left(\frac{1}{3} - y\right)^2 & \text{ii)} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y\right)^2 & \text{iii)} \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)^2 & \text{iv)} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy\right)^2 \\ \text{v)} \left(\frac{1}{3}a\beta - \frac{1}{2}xy^2\right)^2 & \text{vi)} \left(2x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2 & \text{vii)} \left(a^4 - \frac{1}{a^4}\right)^2 & \text{viii)} \left(\frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{3}y\right)^2 \\ \text{ix)} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{4}\right)^2 & \text{x)} (a^2x - \beta^2y)^2 & & \end{array}$$

5. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} (-x - 5)^2 & \text{ii)} \left(-3x - \frac{1}{3x}\right)^2 & \text{iii)} \left(-\frac{1}{3}a\beta - \frac{1}{2}y\right)^2 \\ \text{iv)} (-7 - a^2)^2 & \text{v)} \left(-\frac{1}{3}a^2\beta^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 & \text{vi)} \left(-\frac{x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \left(-\frac{x}{2} + 1\right)^2 & \text{ii)} (-5x + 3y)^2 & \text{iii)} \left(-\frac{1}{a} + a\right)^2 \\ \text{iv)} \left(-\frac{a\beta}{3} + \frac{1}{5}y\right)^2 & \text{v)} (-9 + 5x)^2 & \text{vi)} (-3a^2\beta^3 + 7x^3y^2)^2 \end{array}$$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(4 - x)(4 + x)$

iii) $(xy - 1)(xy + 1)$

v) $(\mu^3 - \nu)(\mu^3 + \nu)$

vii) $(7xy - 9x^2y^2)(7xy + 9x^2y^2)$

ix) $(3y - x^4)(3y + x^4)$

ii) $(3x - 1)(3x + 1)$

iv) $(3a^2 - \beta^2)(3a^2 + \beta^2)$

vi) $(5a^2\beta - 3a\beta^2)(5a^2\beta + 3a\beta^2)$

viii) $(ax^2 + \beta y^2)(ax^2 - \beta y^2)$

x) $(7x^2 - 1)(7x^2 + 1)$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(\alpha + \beta)(-\alpha + \beta)$

iii) $(4a^2 - 3\beta^2)(3\beta^2 + 4a^2)$

v) $(-x + y)(-x - y)$

vii) $(-2a^3 + 3\beta^2)(-2a^3 - 3\beta^2)$

ix) $(-5x^2 - 6y^2)(5x^2 - 6y^2)$

ii) $(3x - 4y)(4y + 3x)$

iv) $(-x - y)(x - y)$

vi) $(-a^2 - 3\gamma^2)(-a^2 + 3\gamma^2)$

viii) $(3x^2 - 4y)(4y + 3x^2)$

x) $\left(-\frac{1}{2}xy + 1\right)\left(-\frac{1}{2}xy - 1\right)$

9. Να βρείτε τα γινόμενα:

i) $(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta - 3)$

iii) $(a^2 - 2a + \beta^2)(a^2 + 2a + \beta^2)$

v) $(\alpha + \beta - x - y)(\alpha + \beta + x + y)$

vi) $(\alpha + \beta - \sqrt{2}a + \sqrt{3}\beta)(\alpha + \beta + \sqrt{2}a - \sqrt{3}\beta)$

ii) $(3a - \beta + \gamma)(3a + \beta + \gamma)$

iv) $(\alpha + \beta + \gamma - 1)(\alpha + \beta - \gamma + 1)$

10. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x + 1)^3$

ii) $(x + 4)^3$

iii) $(2x + 1)^3$

iv) $(\alpha x + \beta y)^3$

v) $(\alpha\beta + 2\gamma)^3$

vi) $(a^2\beta + \gamma^2\beta)^3$

vii) $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^3$

viii) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)^3$

11. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x - 5)^3$

ii) $(4 - x)^3$

iii) $(1 - 2x)^3$

iv) $(\alpha - \beta y)^3$

v) $(\alpha\beta - \gamma)^3$

vi) $(a^2 - \beta^2)^3$

vii) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3$

viii) $(x^2 - \beta x)^3$

12. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(-x - 2)^3$

ii) $(-2a - 1)^3$

iii) $(-κα - λβ)^3$

iv) $(-α^2 - β^2)^3$

v) $\left(-\frac{1}{3}α - \frac{1}{2}β\right)^3$

13. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(-x + 4)^3$

ii) $(-2x + 1)^3$

iii) $(-αβ + γ)^3$

iv) $(-α^2 + βγ)^3$

v) $\left(-x^2 + \frac{1}{3}\right)^3$

14. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(2α + β + γ)^2$

ii) $(2x^2 + 3x + 1)^2$

iii) $(α + 2β - 2γ)^2$

iv) $(2x^3 - 3x + 2)^2$

15. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

i) $(α + 2)^2 + 2(α + 2) + (α - 2)^2$

ii) $(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2 - (2x^4 + 2y^4)$

iii) $(2x - y)^2 - (y - 3x)^2 - 2(x - y)^2$

iv) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 + (x - 2)^2 + (x + 2)^2$

v) $(2x + 5)^2 - (x - 5)^2 + (3x - 1)^2 - (2x + 1)^2$

vi) $(x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (3x^2 + 4)^2 + (x^2 - 1)^2$

vii) $(2α^3 - 2α^2)^2 + (5α + 2)^2 - (3α^2 - α)^2 - (2α^3 + 2)^2$

viii) $(3x + 4y)^2 - (5y - 2x)^2 - 3(x - y)^2$

ix) $(x^2 + 9)(y^2 + 4) - (xy + 6)^2$

x) $(4 + y^2)(x^2 + 1) - (2x + y)^2$

16. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

i) $(3x - 7)(3x + 7) + (x + 6)(x - 6) - (4x + 5)(3x - 4)$

ii) $\left(\frac{3}{2}x^2 + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + 5x\right)$

$$\text{iii)} \quad (3x^4 - 5x^2)^2 - (x^3 + 3x)^2 + (x + 1)^2 - (x^4 + 3x^2)(x^4 - 3x^2)$$

$$\text{iv)} \quad 3(x + 2y)^2 - 5(x - 3y)^2 + 2(x + 2y)(x - 2y)$$

$$\text{v)} \quad (x^3 - y^2)(x^3 + y^2) - (x^3 + y^2)^2$$

$$\text{vi)} \quad (x + y + 2)(x + y - 2) - (x + y)^2$$

$$\text{vii)} \quad (x + y)^2 - (x - y)^2 - (x + y)(x - y)$$

$$\text{viii)} \quad (3\alpha + \beta)^2 - (2\beta - 5\alpha)^2 + (4\alpha + \beta)(4\alpha - \beta)$$

17. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad (2x + 3)^3 + (x - 3)(x + 3)(2x - 5) - 3x(2x - 3)^2$$

$$\text{ii)} \quad (3x - 5)^3 - 2x(3x - 5)^2 + (x - 2)(x + 2)(3x + 1)$$

$$\text{iii)} \quad (\alpha + \beta)^3 + 3(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta) + 3(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^3$$

$$\text{iv)} \quad x^2(y - \omega)^3 + y^2(\omega - x)^3 + \omega^2(x - y)^3$$

18. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$\text{i)} \quad (x + 1)(x + 2)$$

$$\text{ii)} \quad (x + 1)(x + 3)$$

$$\text{iii)} \quad (x + 1)(x - 3)$$

$$\text{iv)} \quad (x - 1)(x - 2)$$

$$\text{v)} \quad (x - 2)(x - 7)$$

$$\text{vi)} \quad (x - 3)(x - 2)$$

$$\text{vii)} \quad (x - 1)(x - 5)$$

$$\text{viii)} \quad (x - 1)(x + 4)$$

$$\text{ix)} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{x)} \quad (x - 4)(x + 5)$$

19. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$\text{i)} \quad (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{ii)} \quad (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{iii)} \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\text{iv)} \quad (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\text{v)} \quad (\alpha - 3\beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2)$$

$$\text{vi)} \quad (\alpha + 3\beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2)$$

$$\text{vii)} \quad (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

$$\text{viii)} \quad (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

20. Να αποδείξετε τις ισότητες:

$$\text{i)} \quad (x^2 + 3x)(x^2 + 6x + 9) = x(x + 3)^3$$

$$\text{ii)} \quad (x^2 + y^2 + xy)^2 = x^2y^2 + (x + y)^2(x^2 + y^2)$$

21. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

i) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

ii) $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

iii) $\alpha^2(\gamma - \beta) + \beta^2(\alpha - \gamma) + \gamma^2(\beta - \alpha) = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$

iv) $\frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma$

v) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4$

22. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

i) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

ii) $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$

iii) $(\alpha^2 - \beta^2)^2 - (\alpha^4 + \beta^4) = -2\alpha^2\beta^2$

iv) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) - (\alpha\beta + 1)^2 = (\alpha - \beta)^2$

v) $(\alpha + \beta)^2 - (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \gamma)^2 - (\beta + \delta)^2 = 2(\alpha - \delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

23. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

i) $(\alpha x + \alpha y)^2 = \alpha^2(x + y)^2$

ii) $(2x + y)^2 + y^2 - x^2 = x^2 + 2(x + y)^2$

iii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$

iv) $(\alpha + \beta)^3 - 4\alpha\beta(\alpha + \beta) = (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)$

v) $(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = \alpha^3 - \beta^3$

24. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(\alpha^{k+1} + \beta^m)^2$

ii) $(\alpha^{k+1} - \alpha^k)^2$

iii) $(\alpha^k + \beta^m)^3$

iv) $(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})^3$

v) $(\alpha^{m+1} - \beta^k)(\alpha^{m+1} + \beta^k)$

vi) $(\alpha^{m+1} - \alpha^v)(\alpha^{m+1} - \alpha^v)$

25. Αν $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $3x^2 - xy + 2y^2$

ii) $-x^2 + xy + y^2$

iii) $x^2 + 2xy + y^2$

iv) $x^2 - 2xy + y^2$

26. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

ii) $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

iii) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

iv) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

27. Αν $x + \frac{1}{x} = \frac{50}{7}$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x^3 + \frac{1}{x^3}$$

28. Ομοίως αν $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$.

29. Αν $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad x^3 - \frac{1}{x^3}$$

30. Αν $x + y = 14$ και $x \cdot y = 40$, $x, y \geq 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2$.

- 31.** i) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός.
ii) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο άρτιου αριθμού είναι άρτιος.
iii) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος αριθμός.

32. Να υπολογίσετε την παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ αν:

i) $\alpha = \sqrt{k}, \quad \beta = \sqrt{k} + \sqrt{\lambda}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda}$

ii) $\alpha = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \beta = \sqrt{2}, \quad \gamma = -\sqrt{3}$

iii) $\alpha = -\sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \beta = -\sqrt{2}, \quad \gamma = -\sqrt{3}$

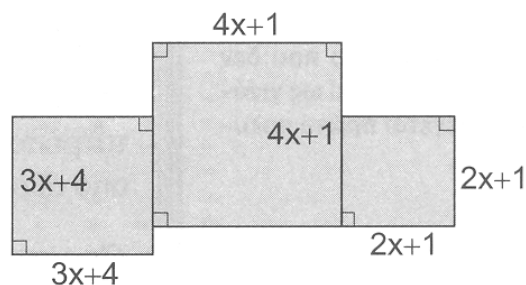
iv) $\alpha = 3\mu - 2, \quad \beta = -\mu + 3, \quad \gamma = -2\mu - 1$

v) $\alpha = -\lambda, \quad \beta = \lambda - 1, \quad \gamma = 1$

vi) $\alpha = -2, \quad \beta = \lambda - 2, \quad \gamma = \lambda$

33. Να βρείτε το πολυώνυμο που παριστάνει το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά $3x + 1$.

34. Να βρείτε το πολυώνυμο που παριστάνει το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου σχήματος που αποτελείται από τρία τετράγωνα.



35. Να βρείτε το πολυώνυμο που παριστάνει το εμβαδό του ορθογωνίου.



36. Να βρείτε το πολυώνυμο που παριστάνει το εμβαδό του σχήματος.

