

3.4

Κλασματικές εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ – ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Η εξίσωση $\frac{x}{x^2+1} = \frac{-2}{x}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

ii) Η εξίσωση $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{3}$ είναι αδύνατη.

iii) Η εξίσωση $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ έχει λύση τον αριθμό $x = 2$.

iv) Η εξίσωση $x - \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-2)}{x-1}$ είναι ταυτότητα για κάθε πραγματικό αριθμό x .

v) Η εξίσωση $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{6}$ λέγεται κλασματική εξίσωση.

2. Η εξίσωση $2x + \frac{2}{x} = 5$ έχει λύσεις τους αριθμούς

A. 1, -1

B. 2, $\frac{1}{2}$

Γ. 2, -2

Δ. $-\frac{1}{2}$, 2

3. Να αντιστοιχίσετε τις κλασματικές εξισώσεις της στήλης Α με τις λύσεις τους που υπάρχουν στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}$	1. 0
β. $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x+3}{x-3}$	2. $\frac{12}{13}$
γ. $\frac{1}{3-x} = \frac{2x}{9-x^2}$	3. ΑΔΥΝΑΤΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{2}{x-2} = \frac{4}{x-4}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x(x+2)} = -1$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{3}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{3}{x^2+x} - \frac{2}{x^2+3x+2} = 0$$

$$\text{ii)} \quad 3 + \frac{3}{x(x+2)} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \frac{-3}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+3x} = 0$$

$$\text{iv)} \quad \frac{6}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+2x} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{2}{x^2-x} + \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2-2x} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{x^2+3x} - \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x^2+2x}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{4}{2(x^2-1)}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{2}{x-1} = \frac{5}{x} - \frac{3}{x+1}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-3}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} = -\frac{1}{x+1}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{6}{x+1} = 3 - \frac{5}{2x+1}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x+7}{x+1} = 5 - \frac{2(x+3)}{2x+1}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x+1}{x-2} - 4 = -\frac{x+11}{x+3}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x-2)}{3x-2} = 0$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{2x}{1-x^2} - \frac{4}{1-x} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} = -2$$

$$\text{v)} \quad \frac{x-1}{x-2} + 2 = -\frac{x-2}{x-1}$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} = \frac{2}{x^2-6x+8}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{2}{(x^2+4x+3)(x+2)} = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2+8}{x^2-4}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x-4}{x+1} + \frac{1}{1-x} = -\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-3}{1-x} = -\frac{4}{x^2-1}$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{4}{49-x^2} - \frac{2x}{7+x} = \frac{x}{x-7}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x}{2x+1} - \frac{2x}{2x-1} = -\frac{1}{1-4x^2}$$

$$\text{iii) } \frac{3x^2 + 1}{9x^2 - 1} + \frac{x - 1}{3x - 1} = \frac{x + 1}{3x + 1}$$

$$\text{iv) } \frac{7x}{2x + 1} + \frac{x + 1}{1 - 2x} = \frac{3}{1 - 4x^2}$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } 2 - \frac{x - 3}{2 - x} = \frac{6}{x^2 - 2x}$$

$$\text{ii) } \frac{x + 1}{2x} - \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{2}{x^2 + 3x}$$

$$\text{iii) } \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - x} = \frac{2}{x^3 - x}$$

$$\text{iv) } \frac{x - 2}{x} - \frac{4}{2 - x} = \frac{8}{x^2 - 2x}$$

$$\text{v) } 1 - \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{vi) } 7 - \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{2}{2x^2 - x} + \frac{x}{1 - 2x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{ii) } \frac{-1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x + 2}$$

$$\text{iii) } \frac{x}{x - 2} - \frac{3x}{x + 1} = \frac{5}{x^2 - x - 2}$$

$$\text{iv) } \frac{13}{x^2 + x - 2} = \frac{3 - x}{x + 2} - \frac{2x - 1}{1 - x}$$

$$\text{v) } \frac{5}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x}{x - 2} + \frac{x - 1}{x + 4}$$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{-3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x + 1}{2 - x} = \frac{2(x - 2)}{x - 1}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{x + 1}{2x + 4} = \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{iii) } \frac{4}{x^2 - x - 2} + \frac{2x}{6 - 3x} = -\frac{x + 5}{2x + 2}$$

$$\text{iv) } \frac{x}{2x - 2} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3x + 3}$$

$$\text{v) } \frac{1}{2x - 2} + \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{3x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 2}$$

$$\text{ii)} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2 + 3x + 2)}$$

$$\text{iii)} \frac{2}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$$

$$\text{iv)} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{2x - 2} = \frac{x}{3x - 6}$$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{ii)} \frac{1}{2x-1} - 1 = \frac{2}{4x^2 - 4x + 1}$$

$$\text{iii)} 1 = \frac{1}{3x+2} - \frac{16}{9x^2 + 12x + 4}$$

$$\text{iv)} \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2 + 4x + 4} - 2$$

$$\text{v)} \frac{x+1}{x^2 - 4} - \frac{2}{5x - 10} = \frac{x-1}{x+2}$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 1} - \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{ii)} \frac{x^3 + 6}{x^3 - 1} = \frac{x}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{iii)} \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{x^2}{x^3 - 8}$$

$$\text{iv)} \frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

17. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\lambda + 1}{x^2 - x - \kappa} + \frac{x + 2\kappa + 1}{\kappa x + \kappa} = \frac{\kappa x}{\lambda x - 2\lambda}$$

όπου κ η μικρότερη και λ η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.

18. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\lambda + 2}{x + \kappa} - \frac{\lambda}{\kappa - x} = \frac{\kappa\lambda(x - 1)}{x^2 - \kappa^2}$$

όπου κ η μικρότερη και λ η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

19. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\kappa\lambda x}{(\kappa x)^2 - 1} + \frac{\lambda - 1}{\kappa x - 1} = \frac{\lambda}{\kappa x + 1}$$

όπου κ η μικρότερη και λ η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $x^2 - 8x + 15 = 0$.

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{\kappa - \lambda}{x - 2\kappa} = \frac{4\kappa - x}{\kappa + \lambda} \quad \kappa \neq -\lambda$

ii) $\frac{\kappa^2}{(x - \kappa)^2} = \frac{\lambda^2}{(x + \lambda)^2} \quad \kappa \neq \pm\lambda$

iii) $\frac{x - \kappa}{\kappa} - \frac{9\lambda}{2x - \lambda} = 0 \quad \kappa \neq 0$

iv) $\frac{x - \kappa}{\kappa} - \frac{9\kappa}{x - \kappa} = 0 \quad \kappa \neq 0$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 + \frac{2}{2x - 1} = \frac{1}{2x^2 - x}$

ii) $\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$

iii) $\frac{x^3 + 2x}{x - 2} - 1 = \frac{4}{x - 2}$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{x-1}{x}\right) + 8 = 0$

ii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

iii) $\left(\frac{x^2+2}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2+2}{x}\right) - 3 = 0$

iv) $\left(\frac{3x+2}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{3x+2}{x^2}\right) - 2 = 0$

v) $\left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x^2-3}{x}\right) + 6 = 0$

23. Να βρείτε τον αριθμό που, αν προσθέσουμε σ' αυτόν τον αντίστροφό του, βρίσκουμε $\frac{10}{3}$.

24. Αν αφαιρέσουμε από έναν αριθμό τον αντίστροφό του, βρίσκουμε $\frac{8}{3}$. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

25. Το άθροισμα του αριθμητή και του παρονομαστή ενός κλάσματος είναι 43. Αν από τον παρονομαστή του κλάσματος αφαιρέσουμε το 18, προκύπτει ένα κλάσμα τριπλάσιο του αρχικού. Ποιο είναι το αρχικό κλάσμα;

26. Το άθροισμα του αριθμητή και του παρονομαστή ενός κλάσματος είναι 37. Αν από τον παρονομαστή του κλάσματος αφαιρέσουμε 12, τότε προκύπτει κλάσμα τριπλάσιο του αρχικού. Να βρείτε το αρχικό κλάσμα.

27. Δύο βρύσες χρειάζονται 12 ώρες για να γεμίσουν μια δεξαμενή όταν τρέχουν μαζί. Η μία μόνη της χρειάζεται 7 ώρες περισσότερο για να γεμίσει τη δεξαμενή απ' ό,τι να τη γεμίσει μόνη της η άλλη. Πόσες ώρες χρειάζεται η καθεμία για να γεμίσει τη δεξαμενή;

28. Δύο εσκαφείς χρειάζονται 18 ημέρες για να τελειώσουν ένα έργο όταν εργάζονται μαζί. Ο ένας μόνος του χρειάζεται 27 ημέρες περισσότερες απ' ό,τι ο άλλος μόνος του. Πόσες ημέρες χρειάζεται μόνος του ο καθένας για να τελειώσει το έργο;

29. Ένα αεροπλάνο ξεκίνησε για ένα ταξίδι 2.250 km με ταχύτητα 900 km/h. Κατά τη μετάβαση, η ταχύτητα του αέρα ήταν σταθερή και παράλληλη στην πορεία του αεροπλάνου. Στην επιστροφή και ενώ είχε περάσει τόσος χρόνος όσος είχε διαρκέσει η μετάβαση, ο πιλότος παρατήρησε ότι του είχαν απομείνει 450 km για να ολοκληρωθεί η επιστροφή. Ποια ήταν η ταχύτητα του αέρα;

30. Σε μια εκδρομή μια παρέα παιδιών έφαγαν σ' ένα εστιατόριο. Ο λογαριασμός ήταν 36.000 δρχ. που έπρεπε να πληρωθεί σε ίσα μερίδια. Όμως 3 παιδιά είχαν ξεχάσει τα χρήματά τους. Τότε ο καθένας από τους υπόλοιπους συμπλήρωσε 2.000 δρχ. στο μερίδιό του για να εξοφληθεί ο λογαριασμός. Πόσα ήταν τα παιδιά;

31. Αν x ελαστικές μπάλες κοστίζουν $3x + 20$ δρχ. και $x + 4$ από τις ίδιες μπάλες κοστίζουν $5x - 4$ δρχ., πόσο κοστίζει η κάθε ελαστική μπάλα;

32. Ένας μαθητής αγόρασε χρωματιστό χαρτόνι συνολικής αξίας 1200 δρχ. και λευκό χαρτόνι συνολικής αξίας 1280 δρχ. Το χρωματιστό κόστιζε 20 δρχ. παραπάνω το μέτρο απ' ό,τι το λευκό. Συνολικά αγόρασε 28 μέτρα χαρτόνι. Πόσα μέτρα χαρτόνι αγόρασε από κάθε ποιότητα; Δίνεται $\sqrt{409.600} = 640$.

33. Σε μια σχολική εκδρομή τα αγόρια ήταν κατά 6 περισσότερα από τα κορίτσια. Τα αγόρια πλήρωσαν για τα έξοδα της εκδρομής συνολικά 12.600 δρχ. και τα κορίτσια 6.400 δρχ. Τα αγόρια όμως πλήρωσαν κατά 100 δρχ. περισσότερο το καθένα, διότι έκαναν χρήση ενός ιδιωτικού γηπέδου ποδοσφαίρου. Πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;

34. Για τον «έρανο της αγάπης» δύο τμήματα της Α' τάξης ενός δημοτικού σχολείου μάζεψαν τα εξής ποσά: Το A_1 τμήμα 10.000 δρχ. και το A_2 τμήμα 6.000 δρχ. Τα παιδιά του A_2 ήταν κατά 5 λιγότερα από τα παιδιά του A_1 . Πόσα ήταν τα παιδιά του κάθε τμήματος, αν το κάθε παιδί του A_2 έδωσε 100 δρχ. λιγότερα χρήματα απ' ό,τι τα παιδιά του A_1 ;

35. Ένας μαθητής κατανάλωσε 30.000 δρχ. που του είχε δώσει δώρο ο παππούς του αγοράζοντας κάποια CD από ένα κατάστημα. Όμως ένας φίλος του του είπε ότι υπήρχε ένα άλλο κατάστημα που τα CD κόστιζαν 1.000 δρχ. λιγότερο και υπολόγισε ότι θα μπορούσε εκεί να πάρει ένα παραπάνω. Πόσα CD είχε αγοράσει;

36. Το προεδρείο μιας τάξης ενός Δημοτικού σχολείου συγκέντρωσε 48.000 δρχ. για αγορά δώρων που θα τα πρόσφεραν στο «παιδικό χωριό SOS». Πήγαν σ' ένα κατάστημα και αγόρασαν ίδια δώρα που η συνολική τους αξία ήταν το ποσό που είχαν συγκεντρώσει. Όμως έμαθαν ότι χρειάζονταν 4 δώρα παραπάνω. Άλλαξαν τα δώρα που είχαν πάρει με δώρα που το καθένα κόστιζε 1.000 δρχ. λιγότερο από τα προηγούμενα και έτσι τώρα με το ίδιο ποσό πήραν τα δώρα που τελικά χρειάζονταν. Πόσα δώρα είχαν αγοράσει την πρώτη φορά;

37. Ένας οικοδόμος είχε παραγγείλει 256 m^3 τσιμέντου σε διαφορετικές εταιρίες σε ίσες ποσότητες. Όμως οι τέσσερις από αυτές ειδοποίησαν ότι δεν μπορούν να τον εξυπηρετήσουν οπότε παρήγγειλε άλλα 32 m^3 στην καθεμιά από τις υπόλοιπες εταιρίες. Σε πόσες εταιρίες είχε κάνει την αρχική παραγγελία;

38. Ένα πλοίο κάνει τη διαδρομή Ραφήνα - Τήνος, που είναι 64 ναυτικά μίλια σε 4 ώρες. Ένα άλλο πλοίο κάνει την ίδια διαδρομή σε 48 λεπτά της ώρας λιγότερο. Το δεύτερο πλοίο ταξιδεύει με ταχύτητα που είναι κατά 4 ναυτικά μιλιά περισσότερο απ' ό,τι η ταχύτητα του πρώτου πλοίου. Πόση είναι η ταχύτητα του πρώτου πλοίου;

39. Αν $3x$ τεμάχια τσίχλες κοστίζουν $7x + 2$ δρχ. και τα $4x + 4$ τεμάχια τσίχλες κοστίζουν $12x + 2$ δρχ., πόσο κοστίζει το κάθε τεμάχιο;

40. Μια βάρκα ταξιδεύει με 6 km/h σε ήρεμο νερό. Μεταβαίνει σε απόσταση 3 km κόντρα στο ρεύμα και μετά επιστρέφει στο αρχικό σημείο. Χρειάστηκε 1 ώρα και $7,5$ λεπτά συνολικά για τη διαδρομή. Ποια η ταχύτητα του ρεύματος;

41. Ένας μαθητής αγόρασε κάποια πακέτα μπισκότα με 120 δρχ. Αν τα μπισκότα ήταν 3 δρχ. φθηνότερα, θα αγόραζε άλλα δύο πακέτα. Πόσα πακέτα είχε αγοράσει;

42. Ένας αγόρασε ζαχαρωτά με 500 δρχ. Αν το κάθε ζαχαρωτό ήταν $2,5$ δρχ. φθηνότερο, θα αγόραζε 10 περισσότερα. Πόσα ζαχαρωτά είχε αγοράσει;

43. Ένας πελάτης αγόρασε από ένα μανάβικο κάποια κιλά μήλα και πλήρωσε συνολικά 400 δρχ. Αν το κιλό είχε 4 δρχ. φθηνότερα, θα αγόραζε 5 κιλά περισσότερα. Πόσο έκανε το κάθε κιλό;

44. Η διαδρομή Αθήνα - Τρίπολη είναι 160 km . Ένα τρένο express κάνει τη διαδρομή αυτή 20 λεπτά λιγότερο από ένα άλλο τρένο το οποίο ταξιδεύει με ταχύτητα 16 km/h λιγότερο από ό,τι το express. Ποια είναι η ταχύτητα του express τρένου;
Δίνεται $\sqrt{30.976} = 176$.

45. Ένας ποδηλάτης ταξιδεύει σε απόσταση 4 km . Μια μοτοσυκλέτα ταξιδεύει στην ίδια διαδρομή με ταχύτητα κατά 3 km/h περισσότερο του ποδηλάτη και φτάνει σε 4 λεπτά λιγότερο. Ποια ήταν η ταχύτητα του ποδηλάτη;