1. **Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάσαμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $t_1, t_2, ... t_\nu$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - (\overline{x})^3 \cdot x + 10 \cdot s$, $x \in \mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το -3 και οι παρατηρήσεις του δείγματος ακολουθούν την κανονική κατανομή.

α. **Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s και να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.**

β. **Να βρείτε το εύρος R και τη διάμεσο δ του δείγματος.**

γ. **Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που περιέχονται στο διάστημα $\left(\overline{x} - \frac{R}{2}, \overline{x} + s\right)$ είναι 1677, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.**

δ. **Αυξάνουμε τις παρατηρήσεις του δείγματος κατά την ίδια θετική σταθερά α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της σταθεράς α για την οποία το δείγμα είναι ομοιογενές.**

2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ παρατηρήσεις ενός δείγματος και $\bar{x} > 0$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων και η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \nu \cdot x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right) \cdot x + \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x = \bar{x}$.

β. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(\bar{x}, 16\nu)$,

i. να βρείτε την τυπική απόκλιση s του δείγματος,

ii. να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος, όταν το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

γ. Θεωρούμε το δείγμα $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ των συντελεστών διεύθυνσης της C_f στα σημεία $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$, ..., $A_\nu(x_\nu, f(x_\nu))$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\bar{\lambda} = 0$.

(Δίνεται $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu} \right\}$)

3. **Έστω $t_1, t_2, ..., t_{100}$ ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής T με μέση τιμή $\overline{t}$, τυπική απόκλιση $s \neq 0$ και η συνάρτηση F με τύπο**

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{t} - 2s)(x-4)}{\sqrt{x} - 2}, \text{ αν } & x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24 \cdot s, \quad \text{αν} & x = 4 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $A = [0, +\infty)$.

α. **Να αποδείξετε ότι για $x \neq 4$ ο τύπος της συνάρτησης F είναι $F(x) = (\overline{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)$.**

β. **Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών $t_1, t_2, ..., t_{100}$ της μεταβλητής T.**

γ. **Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \dfrac{F(x)}{\overline{t} - 2s}$ στο σημείο $A\left(\dfrac{1}{4}, g\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$.**

(Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2005)

4. Δίνονται ένα δείγμα $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ έξι παρατηρήσεων και η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + (x_4 - x)^2 + (x_5 - x)^2 + (x_6 - x)^2, \; x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g εμφανίζει ελάχιστο, όταν $x = \bar{x}$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή του παραπάνω δείγματος.

β. Αν για τις παραπάνω παρατηρήσεις ισχύει:

$x_1 = \alpha$, $x_2 = -5\alpha$, $x_3 = 6\alpha$, $x_4 = 8\alpha$, $x_5 = -\alpha$, $x_6 = 15\alpha$

με α μη μηδενικό πραγματικό αριθμό:

i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s και το συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων.

iii. Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Μ(4α, 256α) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \bar{x}$ καθώς και τις παρατηρήσεις του δείγματος.

5. **Δίνεται το αριθμητικό δείγμα** $x_1, x_2, ..., x_\nu$.

α. **Να αποδείξετε ότι** $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x)^2 \geq \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2$.

β. **Αν η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+...+(x_\nu-x)^2}{\nu}$**

έχει ελάχιστο για $x=10$ το $h(10)=4$ να αποδείξετε ότι το δείγμα $x_1,x_2,...,x_\nu$ δεν είναι ομοιογενές.

γ. **Αν $\overline{x}=10$ και $s_x=2$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της θετικής σταθεράς c που πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος, έτσι ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.**

6. **Έστω $f(x)=sx^2-\overline{x}\ln x-1$ με $x>0$ και $\overline{x}>1$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος μεγέθους ν.**

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε:

α. **Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.**

β. **i.** **Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

ii. **Να αποδείξετε ότι $f'(\overline{x})>f'(s)$.**

γ. **Αν επιπλέον** $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) + s \cdot (\ln x^2 - 1) + 1}{x - 1} = 2$

i. **Να αποδείξετε ότι** $\overline{x} = 2$ **και** $s = 1$.

ii. **Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση στις παρακάτω περιπτώσεις:**

1η περίπτωση: **Κάθε παρατήρηση του δείγματος αυξάνεται κατά 8 μονάδες.**

2η περίπτωση: **Κάθε παρατήρηση του δείγματος αυξάνεται κατά 8%.**

Είναι κάποιο από τα νέα δείγματα ομοιογενές;

7. **Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.**

α. **Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.**

β. **Από τυχαίο σημείο $M(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου να είναι ελάχιστη.**

γ. **Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x}=5$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.**

(Πανελλήνιες Εξετάσεις 2005)

8. **Αν $M_i(x_i, y_i)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3x^2 - 2$ με $i = 1, 2, ..., \nu$ ώστε να ισχύουν:**

- **για τη μέση τιμή του δείγματος $x_1, x_2, ..., x_\nu$**

$$\bar{x} = \lim_{x \to 0} \frac{10\sqrt{16 + 16x + 16x^2} - 40}{x}$$

- **ο αντίστοιχος συντελεστής μεταβολής CV_x είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{30}$.**

Να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων $M_i(x_i, y_i)$ για $i = 1, 2, ..., \nu$.

(Δίνεται $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu} \right\}$.)

9. **Έστω 4, -3, -2, x^2, $-x$, 2 με $x \in (0,1)$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.**

α. **Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του δείγματος γίνεται ελάχιστη, όταν η διάμεσος γίνεται ελάχιστη.**

β. **Για την τιμή $x = x_0$, όπου x_0 το σημείο που η μέση τιμή γίνεται ελάχιστη, να βρείτε:**

i. **τις παρατηρήσεις του δείγματος,**

ii. **τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος,**

iii. **την τυπική απόκλιση.**

10. α. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή $\overline{x}$ και η τυπική απόκλιση s των αριθμών: $\kappa - 2c$, $\kappa - c$, κ, $\kappa + c$, $\kappa + 2c$, $\kappa \neq 0$ είναι $\overline{x} = \kappa$ και $s = |c| \cdot \sqrt{2}$ αντίστοιχα.

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 - cx + 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

γ. i. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ και $c > 0$ να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών του (α) ερωτήματος.

ii. Αν ισχύουν τα δεδομένα του ερωτήματος (γi) και επιπλέον η ελάχιστη τιμή της f είναι 0 να βρεθούν οι αριθμοί του (α) ερωτήματος.

11. **Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις:**

$$f(x)=v_1x+v_2x^2+v_3x^3+v_4x^4\ ,\ g(x)=\frac{x\sqrt{16x}-4x}{\frac{1}{6}\cdot(x-1)},$$

$$h(x)=\ln\left(x^2-20x+2008\right)$$

όπου v_1, v_2, v_3, v_4 οι συχνότητες των τιμών x_1, x_2, x_3, x_4 του παρακάτω πίνακα.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	x_iv_i	$x_i^2v_i$
1						
2						
3						
4						
Σύνολο					100	

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,50)$.

α. **Να βρείτε τη μέση τιμή της κατανομής του πίνακα.**

β. **Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g και το όριο $\lim\limits_{x\to1}g(x)$.**

γ. **Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.**

δ. **Αν ισχύουν: $f_2\%=\lim\limits_{x\to1}g(x)$ και v_3 η θέση που εμφανίζει ακρότατο η συνάρτηση $h(x)$,**

i. **να συμπληρώσετε τον πίνακα,**

ii. **να βρείτε τη διάμεσο δ και τη διακύμανση s^2 της κατανομής του πίνακα.**

(Δίνεται $s^2=\frac{1}{v}\left\{\sum\limits_{i=1}^{\kappa}x_i^2v_i-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\kappa}x_iv_i\right)^2}{v}\right\}$.)

12. Δίνεται η ομαδοποιημένη κατανομή του πίνακα:

[,)	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[2,4)			40
[4,6)			
[6,8)			
[8,10)		10	
Σύνολο			

και η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + \alpha x + 52$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Αν γνωρίζουμε ότι το τμήμα του πολυγώνου $f_i\%$ με άκρα $\Gamma(x_2, y_2)$ και $\Delta(x_3, y_3)$ ανήκει στην ευθεία που είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

α. i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

ii. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

iii. Να υπολογίσετε μέση τιμή και τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των τετραγώνων των παρατηρήσεων.

β. i. Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα και πολύγωνο $F_i\%$

ii. Να εκτιμήσετε τη διάμεσο της κατανομής.

γ. Αν επιπλέον δίνεται $\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 1000$, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

(Δίνεται $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu} \right\}$.)

13. **Δίνεται η ομαδοποιημένη κατανομή του παρακάτω πίνακα.**

α. **Να βρεθούν οι συχνότητες ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 των κλάσεων όταν:**

i. **το** $\nu_1 = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 + x - 18}{x - 2}$

ii. **το** ν_2 **ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης** $f(x) = \frac{x^2 + 7x - 10}{3}$ **στο σημείο** $A(7, f(7))$.

iii. **το** ν_3 **ισούται με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης** $g(x) = 3x^2 + 6x + 14$.

iv. **το** $\nu_4 = 2\nu_2 + \nu_3 + \nu_1 - 11$.

Κλάσεις $[-)$	Συχνότητα ν_i
4 – 10	ν_1
10 – 16	ν_2
16 – 22	ν_3
22 – 28	ν_4

β. **Να κατασκευαστεί ο πίνακας συχνοτήτων απολύτων και αθροιστικών.**

γ. **Να κατασκευαστεί το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων $F_i\%$ και να εκτιμηθεί η διάμεσος της κατανομής (κατά προσέγγιση).**

δ. **Αν οι παραπάνω κλάσεις αναφέρονται στα χρήματα (σε ευρώ) που ξοδεύουν οι 40 οικογένειες μιας πολυκατοικίας για ημερήσιο «χαρτζιλίκι» των παιδιών τους να βρεθεί:**

i. **Ο αριθμός των οικογενειών που δίνει από 24 ευρώ και άνω την ημέρα.**

ii. **Ο αριθμός των οικογενειών που δίνει από 16 έως 25 ευρώ την ημέρα.**

Να θεωρηθούν τα δεδομένα ομοιόμορφα κατανεμημένα.

[Ευκλείδης Β]

14. **Φορτηγό αυτοκίνητο καταναλώνει σε καύσιμα $\frac{\upsilon^2}{2000}$€ ανά ώρα κατά προσέγγιση, όπου υ η μέση ταχύτητα σε km/h. Τα υπόλοιπα έξοδά του είναι 5€ ανά ώρα.**

α. **Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η μέση ταχύτητά του για να καλύψει απόσταση 400km με το ελάχιστο κόστος.**

β. **Αν κατά τη διάρκεια της διαδρομής των 400km με το ελάχιστο κόστος η κατανομή της στιγμιαίας ταχύτητας ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με CV = 10%, να βρείτε:**

i. **Την τυπική απόκλιση της στιγμιαίας ταχύτητας.**

ii. **Πόσο χρόνο το φορτηγό κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη των 120 km/h;**

iii. **Πόσο χρόνο το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη των 90 km/h και μικρότερη των 120 km/h;**

15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\frac{s}{3}\cdot x^3-\frac{\overline{x}}{2}\cdot x^2-2\overline{x}\cdot x+s,\ x\in\mathbb{R}$$

όπου $\overline{x}$ και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος με $\overline{x}>0$. Αν η γραφική παράσταση της f δέχεται στο σημείο με τετμημένη $x_0=10$ οριζόντια εφαπτομένη τότε:

α. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος και να εξετάσετε αν αυτό είναι ομοιογενές.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα, καθώς και το είδος των ακροτάτων.

γ. Με δεδομένο ότι η καμπύλη κατανομής του δείγματος είναι περίπου κανονική να υπολογίσετε το εύρος R των τιμών του δείγματος ως συνάρτηση της μέσης τιμής $\overline{x}$ και να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα $\left(0{,}88\overline{x}\,,1{,}36\overline{x}\right)$.

[Ευκλείδης Β]

16. Αν $f(x)=\alpha\cdot s\cdot x^2-3\overline{x}\cdot x+s^2$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\overline{x}\ (\overline{x}\neq 0)$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X.

Αν η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του α ώστε οι παρατηρήσεις της X να έχουν ομοιογένεια.

[Ευκλείδης Β]

17. Έστω $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$ με $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7<x_8$, οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση $s\neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\overline{x}}{s}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)=f(\overline{x})$ **β.** $\sum_{i=1}^{8} f^2(x_i)=8$

γ. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

δ. $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)<f(x_4)<f(x_5)<f(x_6)<f(x_7)<f(x_8)$

ε. η διάμεσος των τιμών $f(x_i)$, $i=1,2,...,8$ είναι ίση με $\dfrac{6\overline{x}-(x_1+x_2+x_3+x_6+x_7+x_8)}{2s}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(t_1-x)^3+(t_2-x)^3+...+(t_\nu-x)^3$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $t_1,t_2,...,t_\nu$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με τυπική απόκλιση $s>0$ και μέση τιμή $\overline{x}$.

α. Να αποδείξετε ότι $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2}{\nu}-(\overline{x})^2$ (1).

β. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-3\nu\left[x^2-2\overline{x}\cdot x+\left(s^2+(\overline{x})^2\right)\right]$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ. Να βρείτε το σημείο x στο οποίο η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

[Ευκλείδης Β]

19. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3-sx^2+2x+\overline{x}$, όπου $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X. Αν στο σημείο $M(1,5)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

β. Αν $\overline{x}=4$ και $s=2$, τότε:

i. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0=1$.

[Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις Εσπερινών 2007]

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\overline{x}}{2}\cdot x^2-s\cdot x+1$, όπου $\overline{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος παρατηρήσεων με $\overline{x}>0$.
Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

α. Βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

β. Βρείτε τα ακρότατα της f.

γ. Αν επιπλέον $\lim_{x\to s}f(x)=1$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

δ. Για τις τιμές των $\bar{x}$, s του ερωτήματος (γ), βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα $(1,5)$ αν η κατανομή του δείγματος είναι κανονική, καθώς και το εύρος R του δείγματος.

21. Σε μία άσκηση που δόθηκε σε ένα διαγώνισμα οι χρόνοι (σε min), που χρειάστηκαν οι μαθητές για να λύσουν την άσκηση, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους με αντίστοιχες συχνότητες 6, 10, 7, 7.
Αν η συνάρτηση $f(x)=6(x_1-x)^2+10(x_2-x)^2+7(x_3-x)^2+7(x_4-x)^2$ παρουσιάζει ακρότατο για $x=7$ με τιμή ακροτάτου 134, όπου x_1, x_2, x_3, x_4 τα κέντρα των αντίστοιχων κλάσεων,

α. να βρεθούν τα κέντρα των κλάσεων και να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων

β. να βρεθεί η τυπική απόκλιση και ο $CV\%$.

(Δίνεται $s^2=\dfrac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\nu_i-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$, $\sqrt{4,46}\simeq 2,11$.)

[Ευκλείδης Β]

22. Έστω t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 οι παρατηρήσεις ενός δείγματος, $\bar{x}$ η μέση τιμή τους, s^2 η διακύμανση και η συνάρτηση $f(x)=(t_1-x)^3+\ldots+(t_5-x)^3$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι $f'(\bar{x})=-15\cdot s^2$.

γ. Να δείξετε ότι $f''(x)=30(\bar{x}-x)$.

δ. Αν οι παρατηρήσεις είναι 0, 2, 4, 4, 5 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο $x_0=\bar{x}$.

[Ευκλείδης Β]

23. Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:
$t_1=0$, $t_2=0$, $t_3=1$, $t_4=2$, $t_5=4$, $t_6=5$

α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

β. Αν $f(x)=(t_1-x)^2+(t_2-x)^2+(t_3-x)^2+(t_4-x)^2+(t_5-x)^2+(t_6-x)^3$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $f'(\bar{x})=0$

ii. να αποδείξετε ότι $f(\overline{x}) = 6s^2$, όπου s^2 είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων

iii. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης ης συνάρτησης f στο σημείο $A(\overline{x}, f(\overline{x}))$.

(Πανελλήνιες Εξετάσεις Εσπερινών 2003)

24. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:
$g(x) = f^2(3x-2) + f(x^2 - x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -1$, $f'(1) = 1$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $A(1, g(1))$ είναι η $y = -5x + 5$.

β. Αν πάρουμε 2004 διαφορετικά σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2004}, y_{2004})$ της προηγούμενης εφαπτομένης και οι τετμημένες τους έχουν μέση τιμή $\overline{x} = 400$ και τυπική απόκλιση $s = 200$ να βρεθούν:

i. Η μέση τιμή των τεταγμένων.

ii. Η μέση τιμή των τετραγώνων των τετμημένων δηλαδή των $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{2004}^2$.

(Δίνεται $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu} \right\}$.)

[Ευκλείδης Β]

25. Έστω οι παρατηρήσεις 1, 1, 2, 2, 3, 3.

α. Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\overline{x}$ και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων

ii. τα μέτρα διασποράς

iii. το συντελεστή μεταβολής.

β. Αν αυξήσουμε κατά x, $x > 0$, τις παρατηρήσεις με τιμή 1 να εκφράσετε ως συνάρτηση του x

i. τη νέα μέση τιμή **ii.** τη νέα διακύμανση.

γ. Για ποια τιμή του x η διακύμανση των παρατηρήσεων γίνεται ελάχιστη και ποια είναι αυτή;

26. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου:

Ώρες εργασίας μαθητών x_i	Συχνότητα ν_i
1	α
2	5
3	β
4	2
5	1

Όπου α και β είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου αντίστοιχα της συνάρτησης $f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=3$.

β. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και τη διάμεσο δ των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.

γ. Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες;

(Πανελλήνιες Εξετάσεις Εσπερινών 2005)

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε το σημείο $M(x,f(x))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=16$.

δ. Έστω x_i, $i=1,2,3,4$ οι τιμές μιας μεταβλητής x, ενός δείγματος μεγέθους $\nu=40$. Αν $\kappa=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
1	4			
2	κ			
3				
4		0,2		
Σύνολο		1		

[Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2008]

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x-3, & 2\le x\le 4 \\ 3x-9, & 4<x<6 \\ \frac{3}{2}x, & 6\le x\le 10 \end{cases}$

Αν η γραφική παράσταση είναι το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων μιας κατανομής συχνοτήτων, με 4 κλάσεις ίσου πλάτους:

α. Να γίνει το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

β. Να βρεθεί η εξίσωση παραβολής $y=\alpha x^2$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(\delta, f(\delta))$ όπου δ είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων.

γ. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην παραβολή στο σημείο $(\delta, f(\delta))$.

[Ευκλείδης Β]

29. Σε μια κανονική κατανομή ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(16,22)$ με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x}\pm 3s$, $\bar{x}\pm 2s$, $\bar{x}\pm s$, $\bar{x}$.

α. Να δείξετε ότι $\bar{x}=20$ και $s=2$.

β. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x}-\alpha\cdot s, \bar{x}+\alpha\cdot s)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{R}{2}x^2-(\bar{x}+4)x+9s$.

(Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις 2005)

30. Έστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+\kappa x+4\sqrt{x}+10$, $x\ge 0$

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\kappa=2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}=f(1)$ και τυπική απόκλιση $s=-\frac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

i. Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10,16)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

(Πανελλήνιες Εξετάσεις 2006)

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - 7x + 2005$,

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2006 \text{ και } h(x) = (3x-4)^{2005} + 2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 1} + 11$$

α. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων f, g.

β. Να βρεθεί η λύση x_0 της εξίσωσης $f'(x) = g'(x)$.

γ. Να υπολογιστεί το όριο $\ell = \lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

δ. Αν ένα δείγμα ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $s = x_0$ και διάμεσο $\delta = \ell$ τότε να βρεθεί:

i. κατά προσέγγιση η μικρότερη και η μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος,

ii. κατά προσέγγιση το εύρος του δείγματος,

iii. το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(8,16)$.

[Ευκλείδης Β]

32. Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\bar{x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$, $s = \lim\limits_{x \to 1} g(x)$, όπου $f(x) = 4\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$,

$$g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$$

εξετάστε αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιογενείς και να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(2g(2), 3g(3))$.

[Ευκλείδης Β]