Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

Εκφωνήσεις

19-2-2023

220 Ασκήσεις

19-2- 2023

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Θέμα 2ο

15011. Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.
α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:
3. $50y - 20x = 480$ 4. $20x + 50y = 480$
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας. (Μονάδες 11)

15016. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος . (Μονάδες 8)
β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.
(Μονάδες 7)

15849. Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά.
Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.
α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

(Μονάδες 10)
β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι. (Μονάδες 15)

18431. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x,y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$. (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$. (Μονάδες 13)

21227. α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1): $5x - y = 5$ και (ε_2): $-5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

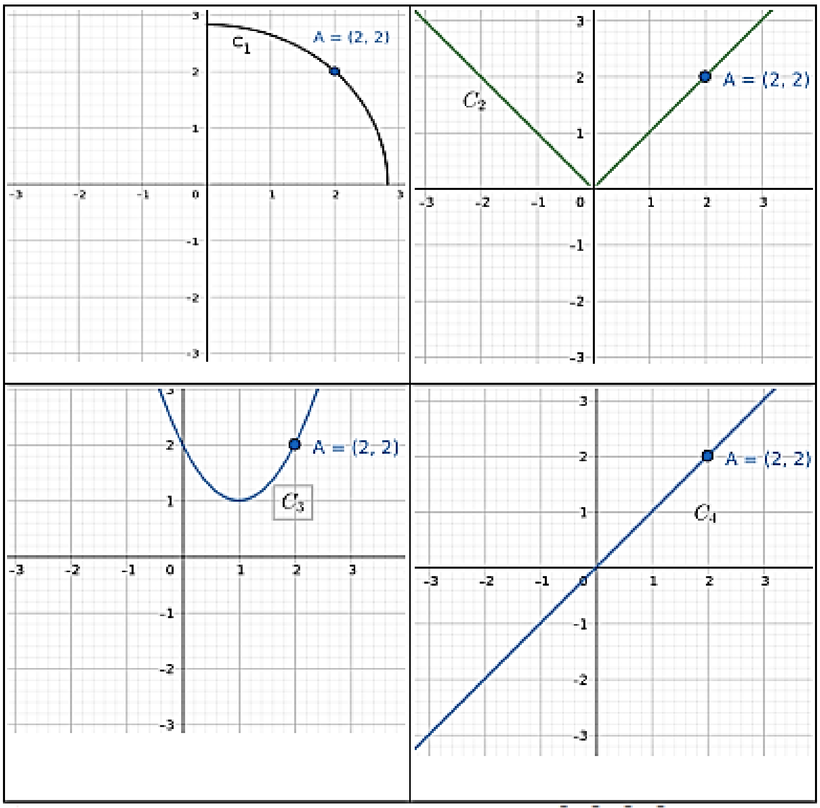
31570. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.
α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 13)
β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 12)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

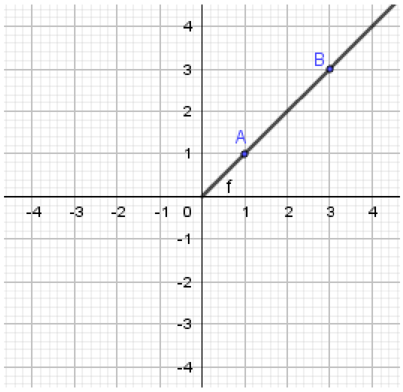
14976. Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1 ,C_2 ,C_3 ,C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή. (Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2 ,C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. (Μονάδες 13)

14971. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B.

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα A,B και είναι περιττή.

Μονάδες 13

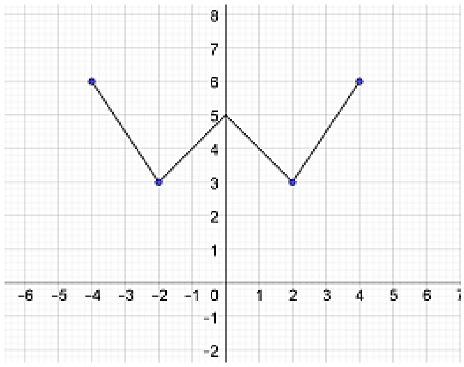
15019. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια . (Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)

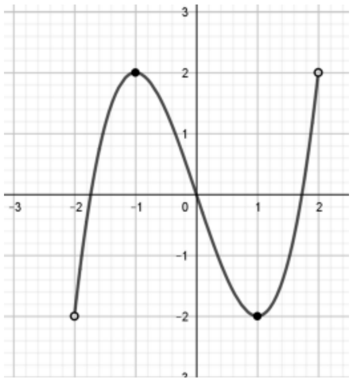
γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)

15024.Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [4, 4] – φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
(Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
(Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.
(Μονάδες 9)

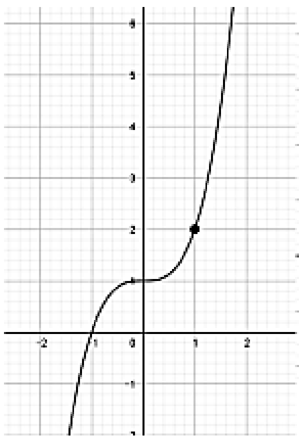
15112.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.



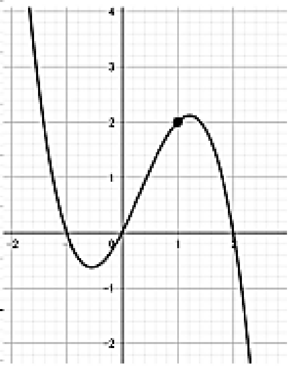
α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)
β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.
(Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.
(Μονάδες 10)

15114.Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,9); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

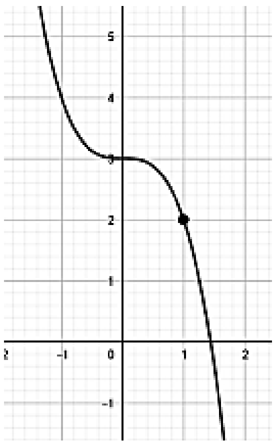
i.



ii.



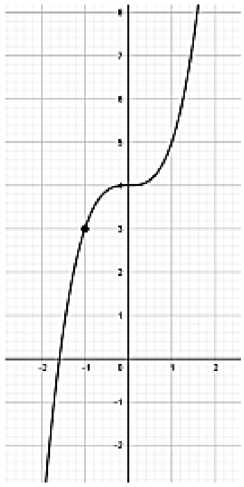
iii.

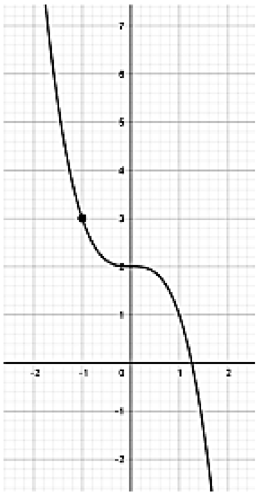


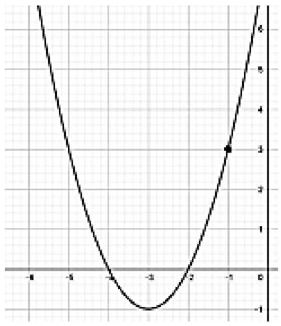
(Μονάδες 12)

15115.Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ii. iii.

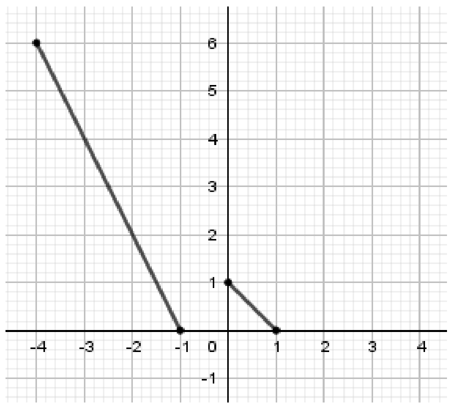






(Μονάδες 12)

15116.Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

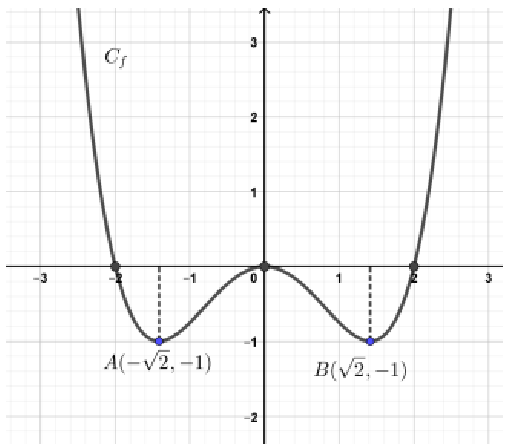
β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών. (Μονάδες 9)

15349.Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

(Μονάδες 7)

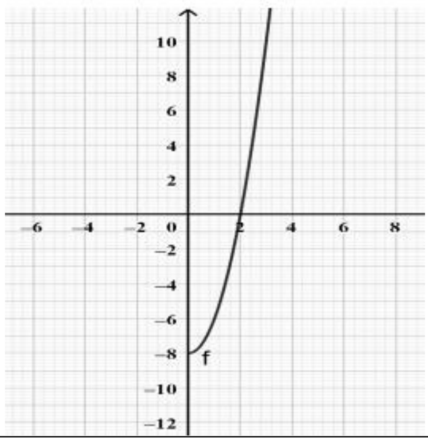
β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2},-1\right)$ και $B\left(\sqrt{2},-1\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 10)

15372.Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

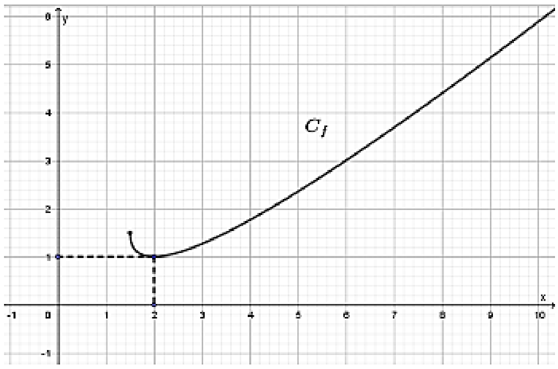
i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

15437. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

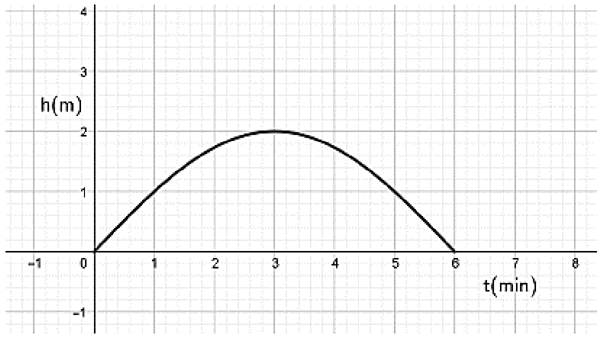
β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

I. γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα (Μονάδες 5)

15645. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

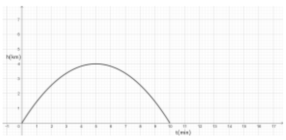


α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. (Μονάδες 5)

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. (Μονάδες 10)

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. (Μονάδες 10)

15787. Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου. (Μονάδες 5)

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 6)

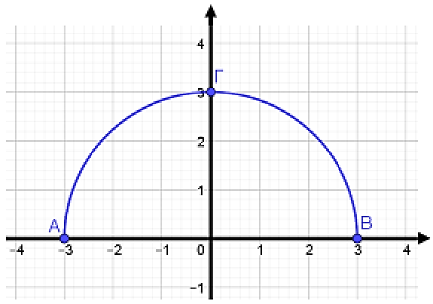
β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km.

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη. (Μονάδες 7)

ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 7)

19-2- 2023

16129. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

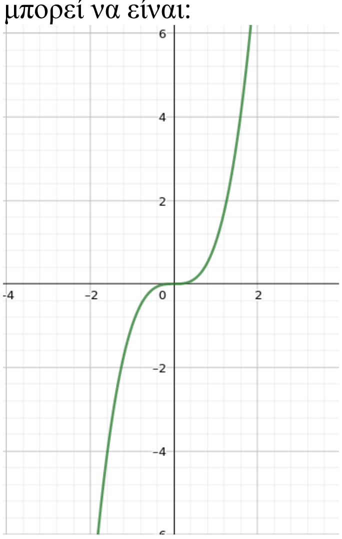
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)

21164. Δίνεται το σημείο $A(-2,8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f.

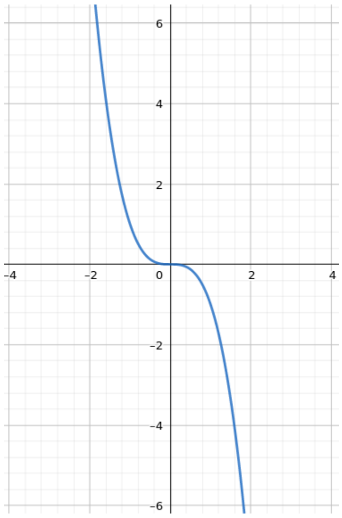
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

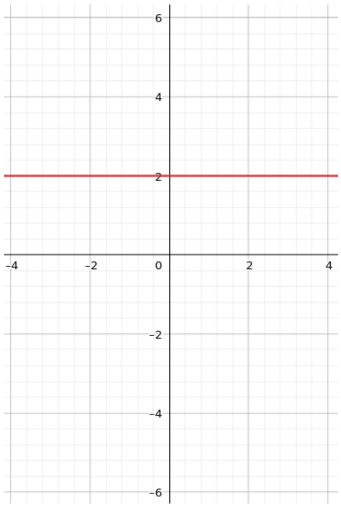
γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)



Γραφική παράσταση (β)



Γραφική παράσταση (γ)

(Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

15022. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)<f(2)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. (Μονάδες 6)

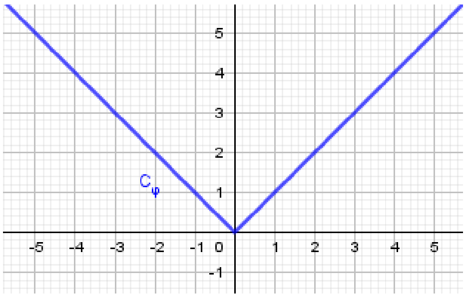
δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ δ. $f(x)=-\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

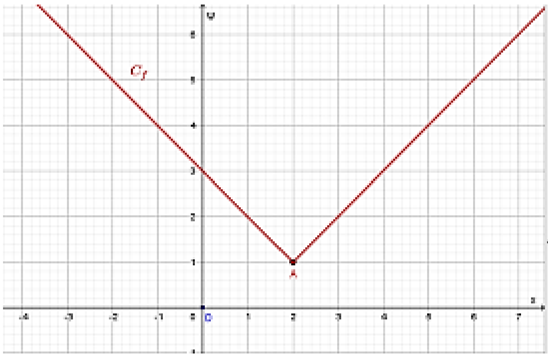
Θέμα 2ο



14972. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της (Μονάδες 13)

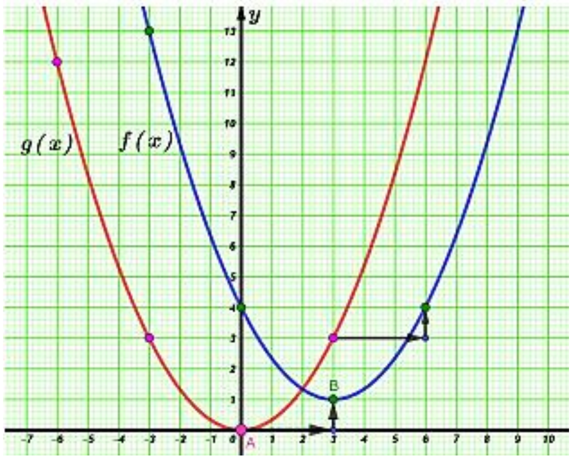
β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της , η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)



14983. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x0 η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(i) $f(x)=g(x+3)+1$

(ii) $f(x)=g(x+3)-1$

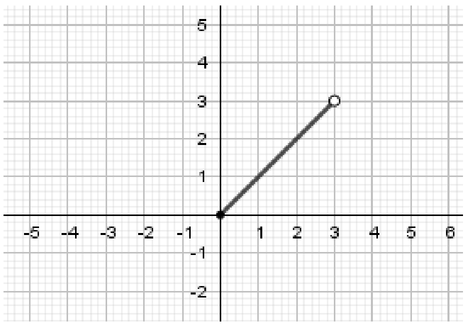
(iii) $f(x)=g(x-3)+1$

(iv) $f(x)=g(x-3)-1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου. (Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)



15017. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)

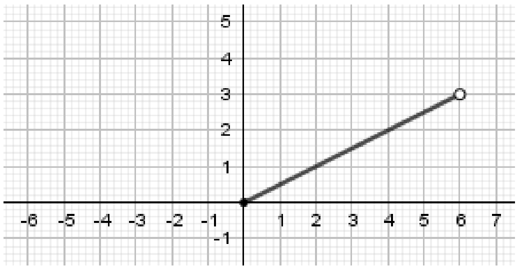
19-2- 2023

15018. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



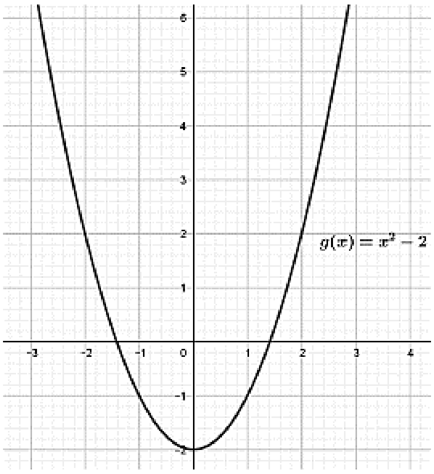
15811. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

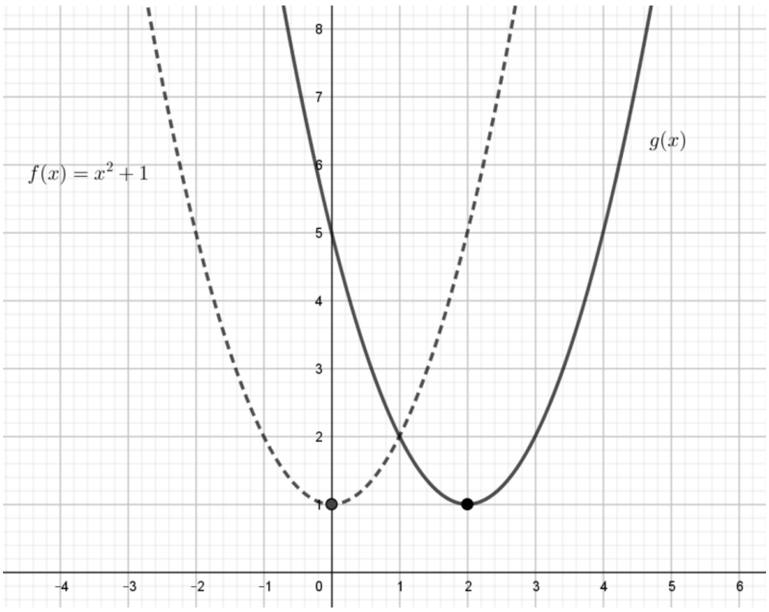
i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια. (Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού. (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. (Μονάδες 9)



20671. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x\in\mathbb{R}$.



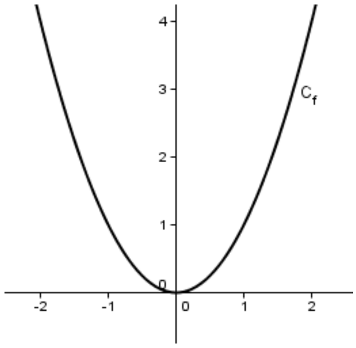
α) i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g; (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g. (Μονάδες 4)

21673. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.



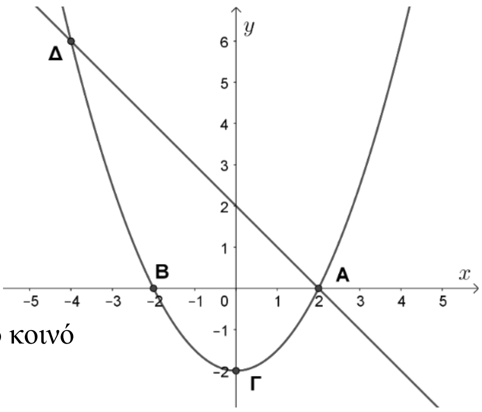
α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$. (Μονάδες 9)

Θέμα 4ο

14294. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ . (Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$ και $\gamma=-2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής. (Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 9)

14973. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ(x) είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3(x-1)^2+5,\ x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης (Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 7)

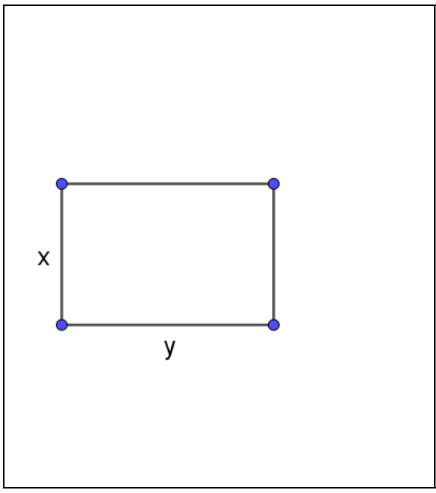
20715. Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=-(x-5)^2+25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης $g(x)=-x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)



20642. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x)=e^{x}-1,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,\ 2)$, τότε:

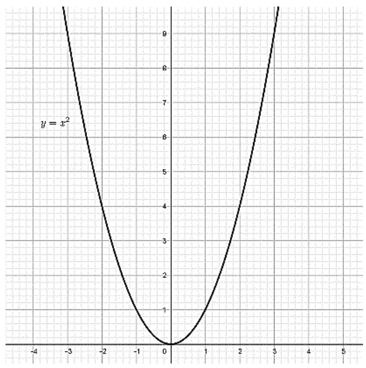
α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O. (Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x)=-2x^{3}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω. (Μονάδες 6)

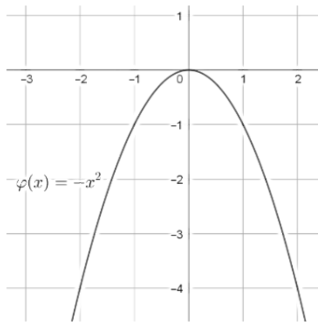
32674. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2}-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^{2}+1$. (Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x)=x^{2}$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί. (Μονάδες 15)

32677. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^{2},\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^{2}+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^{2}+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. (Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)

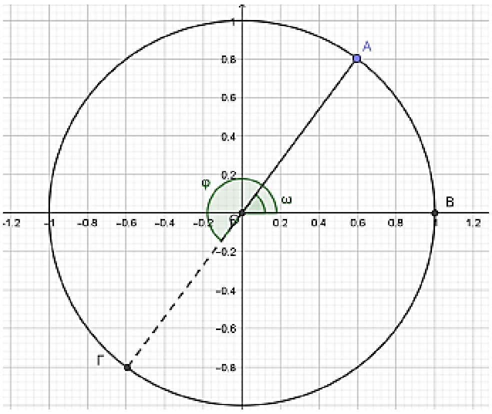
iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Θέμα 2ο

15079. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\omega = B\hat{O}A$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

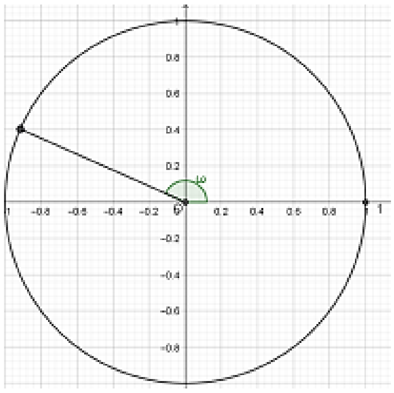
(Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\varphi = B\hat{O}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας ω. (Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\varphi$. (Μονάδες 9)

15191. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0{,}4$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)

18868. α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500^{\circ} = \varepsilon\varphi 140^{\circ}$. (Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500^{\circ}$. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500^{0} \cdot \eta\mu 250^{0} \cdot \sigma\upsilon\nu 300^{\circ}$. (Μονάδες 10)

21161. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο ΑΒ με μήκος ίσο με 2ρ.

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω. (Μονάδες 13)

β) Αν ω=2 ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω. (Μονάδες 12)

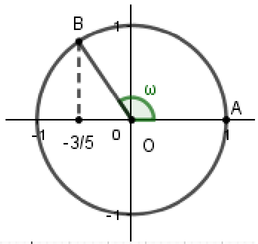
Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Θέμα 2ο

15046. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sigma\upsilon\nu A = -\frac{3}{5}$.

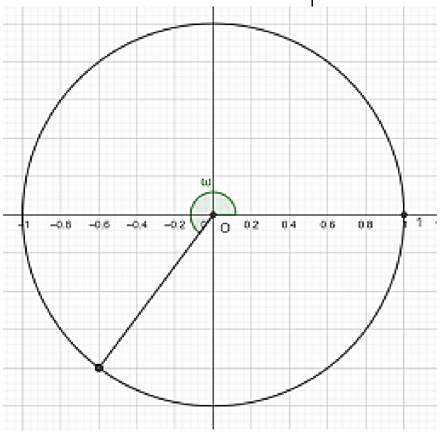
α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε το $\eta\mu A$. (Μονάδες 15)

15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 11)



β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω. (Μονάδες 14)

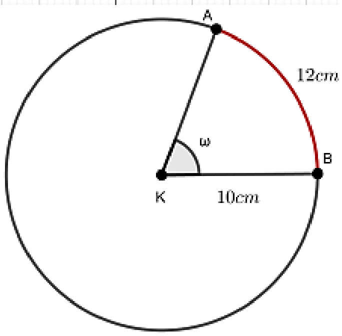
15192. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
i. ημω . (Μονάδες 6)
ii. εφω (Μονάδες 7)

15814. Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm . Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad . (Μονάδες 6)
ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία. (Μονάδες 6)
β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το ημω .
(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) (Μονάδες 13)

16000. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

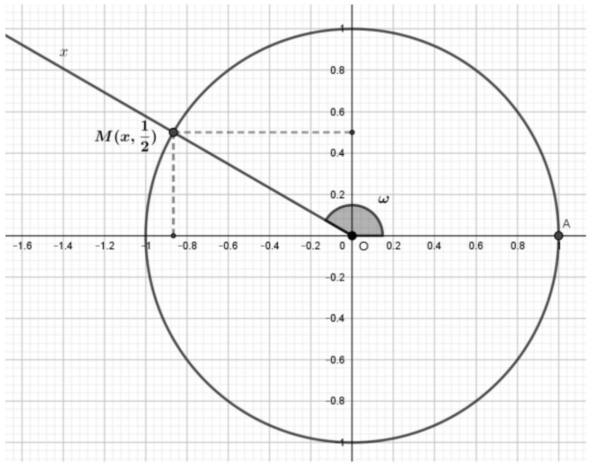
β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το ημθ . (Μονάδες 13)

20817. Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega}$. (Μονάδες 13)

20824. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $AOx = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.



α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M;

(Μονάδες 12)

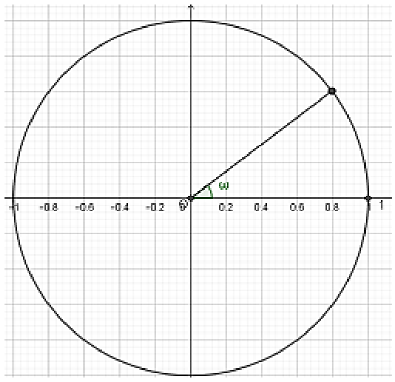
β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Θέμα 2ο

15193. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}8$.



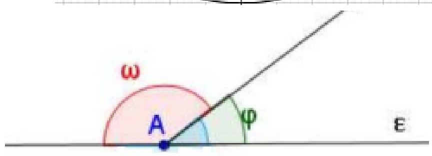
α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0{,}8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 13)

15652. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

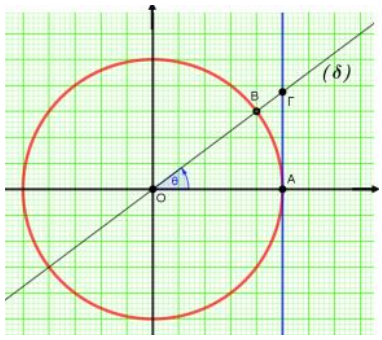


α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος. (Μονάδες 15)

15092. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $AOB = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.



Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

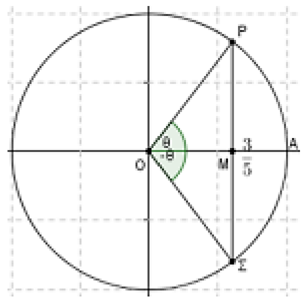
α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)

15266. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ημθ. (Μονάδες 9)

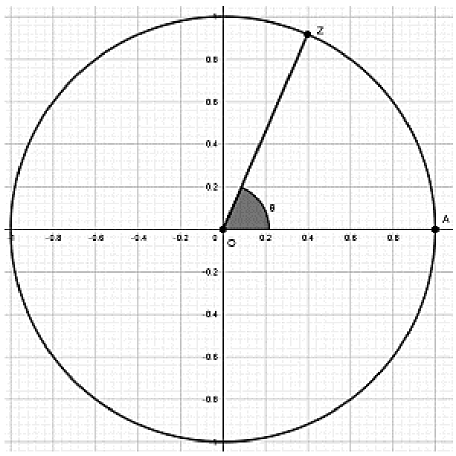
γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$. (Μονάδες 8)

15999. Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$. (Μονάδες 13)

17936. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών

$3\pi+\theta$ και $\frac{\pi}{2}+\theta$. (Μονάδες 9)

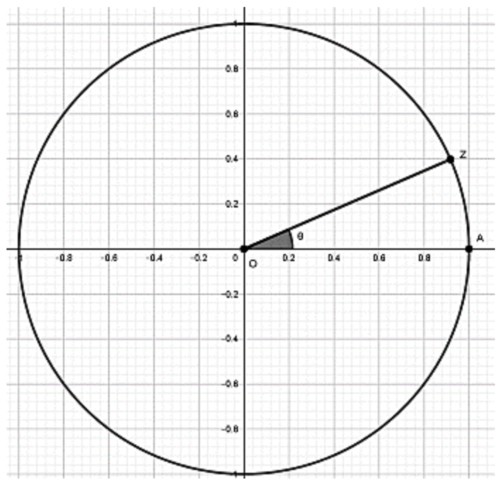
β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,4$. (Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu(3\pi+\theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

(Μονάδες 9)

17933. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi+\theta$ και $4\pi-\theta$. (Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$. (Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu(3\pi+\theta)$ και $\eta\mu(4\pi-\theta)$.

(Μονάδες 9)

21237. Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5) **ii.** $\eta\mu\theta = \sqrt{3}-1$ (Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$. (Μονάδες 13)

22002. Δίνεται ότι $\eta\mu 18^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

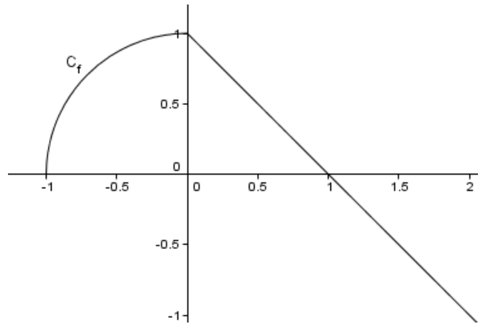
α) $\sigma\upsilon\nu 72^{\circ}$ (Μονάδες 8)

β) $\sigma\upsilon\nu 108^{\circ}$ (Μονάδες 9)

γ) $\eta\mu 162^{\circ}$ (Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

18231. Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\dfrac{3}{5}\right), f\left(-\dfrac{5}{9}\right)$. (Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$$

, να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^{\circ}),\ f(\eta\mu 120^{\circ})$. (Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2),\ x\ge 1$. (Μονάδες 5)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

15091. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$. (Μονάδες 8)

15172. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu(11\pi-x),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi-x)=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

ii. $f(x)=4\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4\eta\mu x$ όταν $x\in[0,2\pi]$. (Μονάδες 15)

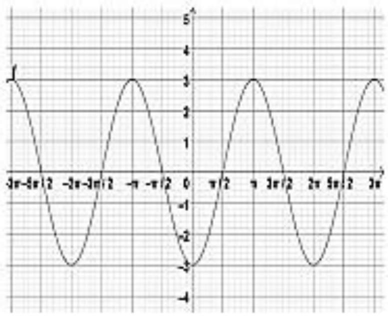
15009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

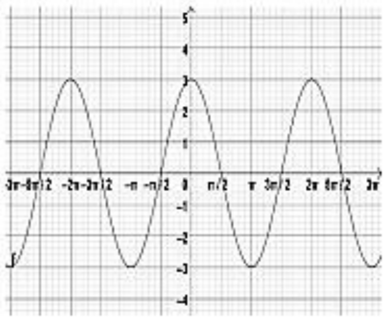
β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

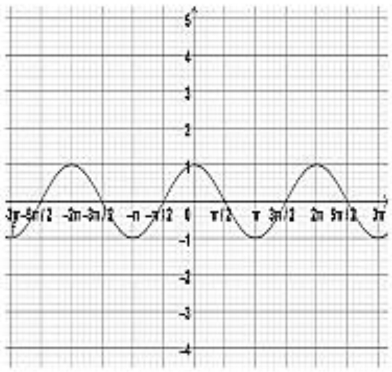
Α)



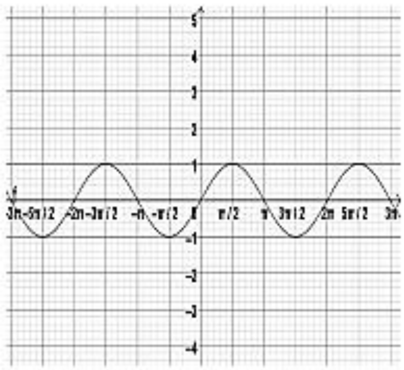
Β)



Γ)

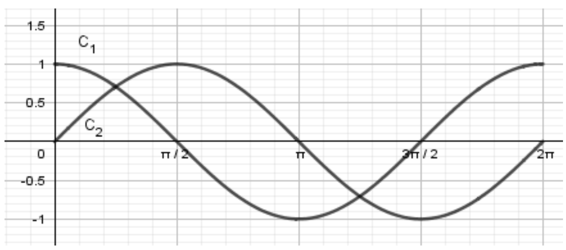


Δ)



(Μονάδες 10)

15644. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.

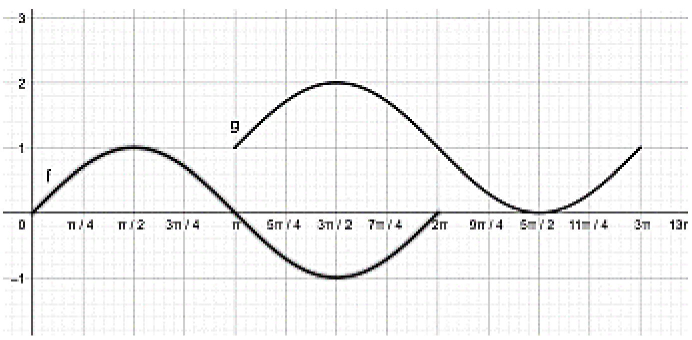


α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \text{συν}x$ και $g(x) = \text{ημ}x$ για $x \in [0, 2\pi]$
ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \text{συν}x$ και ποια της $g(x) = \text{ημ}x$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\text{ημ}x = \text{συν}x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

15788.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.
Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

(Μονάδες 13)

β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g . (Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g . (Μονάδες 6)

15809.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . (Μονάδες 6)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

15810.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)

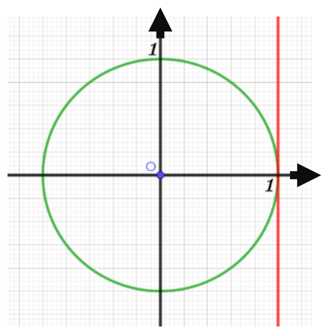
β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x)=\eta\mu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

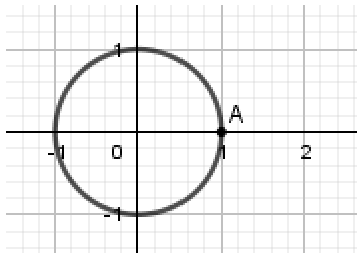
16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ όπου $k\in\mathbb{Z}$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $(0,2\pi)$. (Μονάδες 15)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 10)

17793.Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B,Γ,Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $AB=1\text{rad}$, $A\Gamma=2\text{rad}$ και $A\Delta=4\text{rad}$. (Μονάδες 13)

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 12)

20660. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(180°-x)+\sigma\upsilon\nu(90°-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0\le x\le 2\pi$. (Μονάδες 7)

20807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu(-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής. (Μονάδες 12)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

(Μονάδες 6)

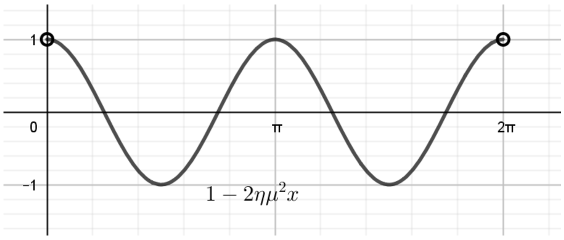
ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \le x \le 2\pi$. (Μονάδες 7)

20867. Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$. (Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$. (Μονάδες 9)

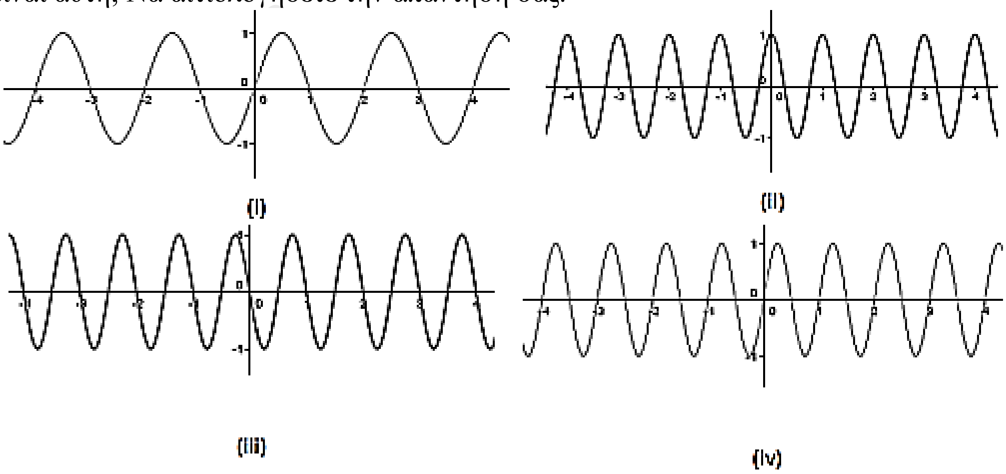


22003. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T = 1. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$. (Μονάδες 8)

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

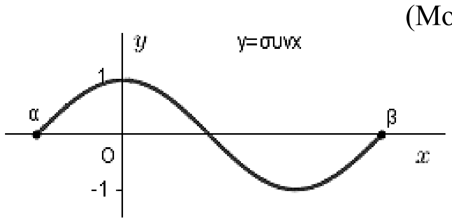


(Μονάδες 9)

22007. Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.

α) Να βρείτε τα α και β. (Μονάδες 12)

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx ; (Μονάδες 13)



31568. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ; (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

31569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συν2x$, $x \in \mathbb{R}$

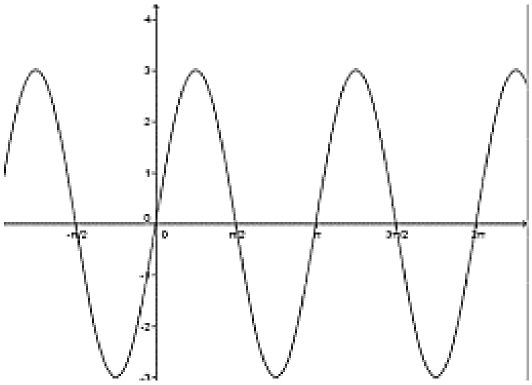
α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$συν2x$					
$f(x) = -3συν2x$					

Θέμα 4ο

15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = ρημ(αx), x \in \mathbb{R}$ και $α, ρ > 0$.



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ. (Μονάδες 6)

Έστω ρ = 3 και α = 2. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)

15992. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ρημ(αx), g(x) = ημ(ωx)$ όπου $ω, ρ > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι- 2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2ημx$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = ημ(2x)$, $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2ημ\frac{5\pi}{9} > ημ\frac{10\pi}{9}$. (Μονάδες 9)

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $α \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(α) = f\left(\frac{\pi}{2} - α\right)$, να αποδείξετε ότι $α = \frac{\pi}{4}$. (Μονάδες 5)

20870. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2,6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = αημ(ωt) + β$, με $α, ω, β > 0$ και $0 \le t \le 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $α, ω$ και $β$. (Μονάδες 6)

β) Αν $α = 1,6$, $ω = \frac{\pi}{6}$ και $β = 4,2$,

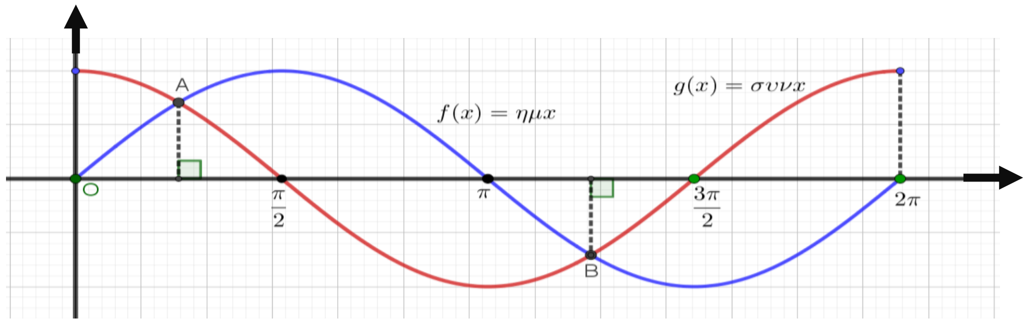
i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y=1{,}6\cdot ημ(\frac{\pi}{6}t)+4{,}2$, με $0\le t\le 24$. (Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι; (Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια; (Μονάδες 7)

3ο Θέμα

15391. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$, $x\in[0,2\pi]$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης g στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης f στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$. (Μονάδες 4)

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

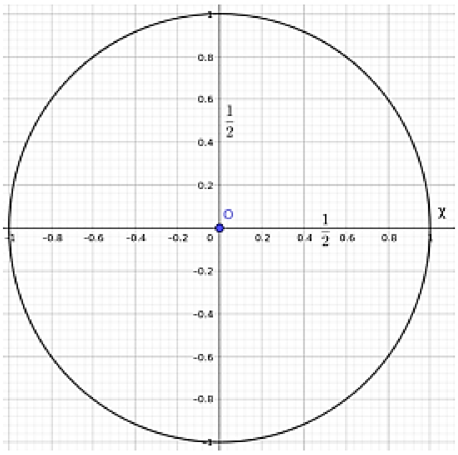
i. $συν\frac{2\pi}{3}$ και $συν\frac{5\pi}{6}$. (Μονάδες 5)

ii. $ημ\frac{5\pi}{3}$ και $ημ\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. (Μονάδες 6)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

15036.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)
ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

15969.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν(13π + x) - 2ημ\left(\frac{π}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $συν(13π + x) = -συνx$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4συνx$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$. (Μονάδες 12)

21995.Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = α$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ όταν:
α) $α = 1$. (Μονάδες 13)
β) $α = -2$. (Μονάδες 12)
Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

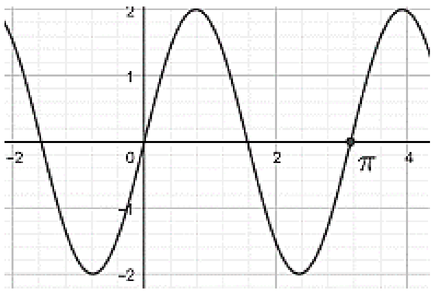
32675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)
β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2π]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

Θέμα 4ο

15003.Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = ημαx \cdot \left[συν\left(\frac{π}{2} - αx\right) + 2\right] - συναx \cdot συν(π - αx) - 1,\ α \in \mathbb{R}.$$



α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2ημαx,\ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι α = 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε: y = 1 για $x \in [0, π]$. (Μονάδες 9)

15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αημβx$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

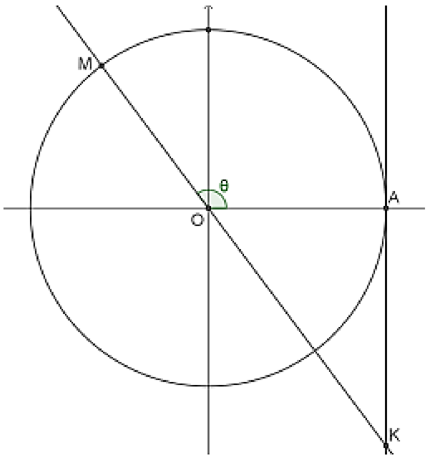
α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 . (Μονάδες 6)

β) Αν $α = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία $f\left(\frac{π}{16}\right) = 2$ είναι $β = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $α = 2$ και $β = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{π}{2}\right]$. (Μονάδες 9)

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $θ = \widehat{AOM}$ με $ημθ = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο Κ.



α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Κ . (Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $φ \in [0, 2π]$ για την οποία ισχύει $ημφ = \frac{3}{5}$ και $συνθ < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $θ < φ$. (Μονάδες 6)

15026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2ημ\left(\frac{πx}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x . (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

15049. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) + ημ(π + x), x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = συνx - ημx$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \le f(x) \le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x΄x . (Μονάδες 6)

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συνx$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 5)

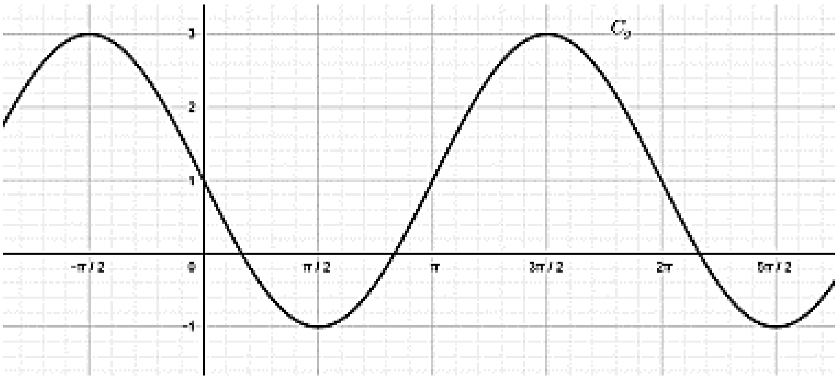
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{π}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2π}{5}\right)$. (Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα [0, 2π]. (Μονάδες 6)

15288. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημ3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο Τ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha ημβx+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

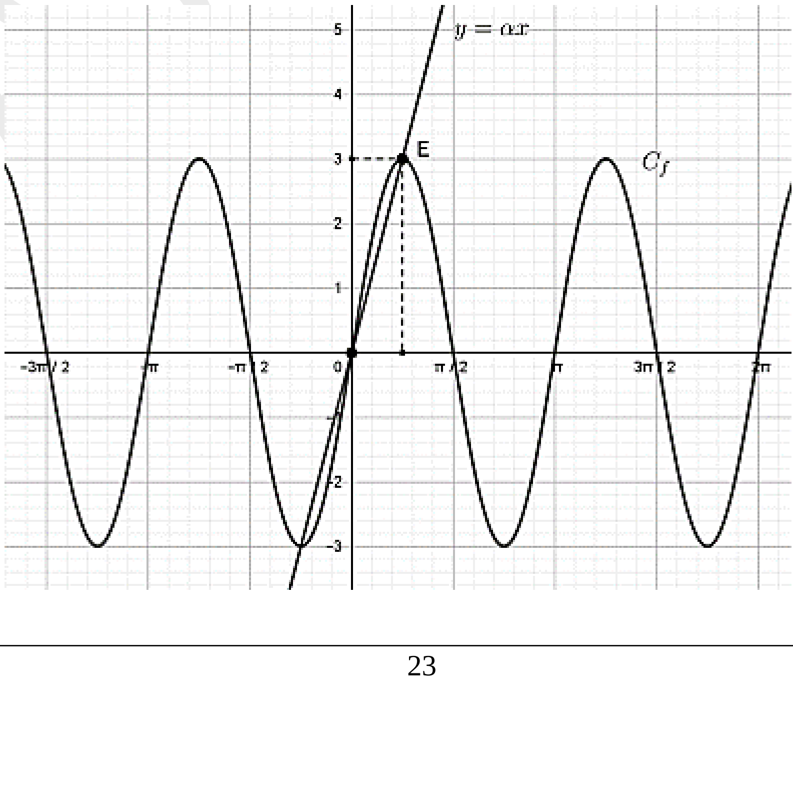


i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, και γ.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$. (Μονάδες 10)

15347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν^2(\pi-x)-3ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2συν^2x-3συνx+\alpha$. (Μονάδες 8)
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.
(Μονάδες 5)
δ) Για α =2 και $g(x)=2ημ^2x+9συνx-9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 7)

15287. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho ημ(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x\in\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,
α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α . (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3ημ(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$. (Μονάδες 10)



15422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x)$, $\alpha>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu 2x$. (Μονάδες 5)

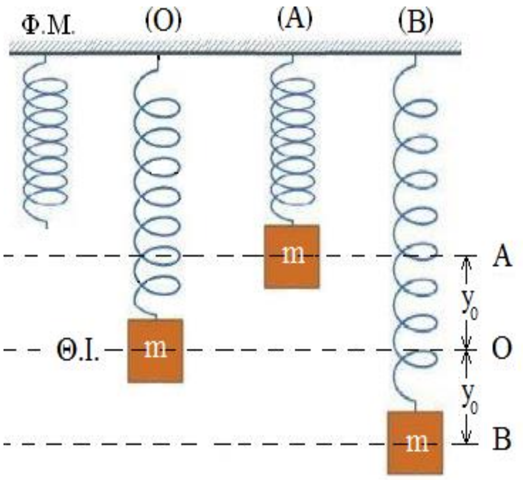
β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α = 2. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f. (Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

14975. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.
Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_o$.
Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι: $y(t)=1+0,2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$



α) Να βρείτε το y_o και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t\in[0,4]$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t\in[0,2]$. (Μονάδες 07)

15821.α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x=0$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β). (Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x<3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$. (Μονάδες 6)

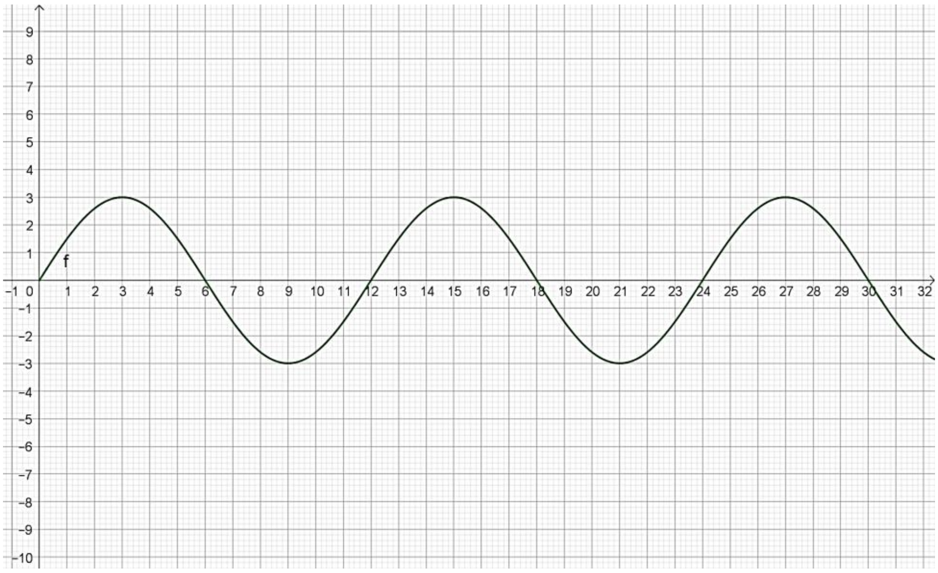
20645. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$. (Μονάδες 7) f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :



α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη). (Μονάδες 6)
β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας. (Μονάδες 6)
γ) τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)
δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα. (Μονάδες 7)

$f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\text{συν}(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

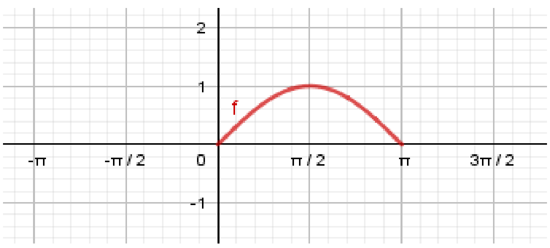
α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A=\frac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\text{εφ}(\pi-x)\cdot\text{ημ}(2\pi+x)}{\text{συν}(3\pi-x)\cdot\text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $A=-1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2A$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 10)

Θέμα 3ο



$f(x)=\text{ημ}x$ με $x\in[0,\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 8)

. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται; (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 9)

[illegible] η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο

Πολυώνυμα

Πολυώνυμα

Θέμα 2ο

15113.Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=-2x^3+4x^2+2(x^3-1)+9$ και $Q(x)=\alpha x^2+7,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο P(x) 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα. (Μονάδες 12)

20640. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-8x^2+7x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 9)
β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x)=P(x)+Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x)=P(x)\cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 8)

21998.Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-2)(x^6+1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x). (Μονάδες 13)

Διαίρεση πολυωνύμων

Θέμα 2ο

14981.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x+6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)

15012.Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$. (Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

15096.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2+x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

15642.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. (Μονάδες 10)

β) i. Να υπολογίσετε την τιμή P(0). (Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

20941.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+x+3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 08)
β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+2)$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$. (Μονάδες 07)

21997. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.
α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
β) Ποιο είναι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) που προκύπτει από την διαίρεση P(x): (x − 2);
(Μονάδες 13)

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

15040. Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$
α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της. (Μονάδες 5)
β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
(Μονάδες 10)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$. (Μονάδες 10)

15047. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)
β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα. (Μονάδες 15)

15175. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x-1$.
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)(x^2+1)$. (Μονάδες 10)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 10)

15176. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$.
α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. (Μονάδες 12)
β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2-x+2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x)>0$. (Μονάδες 13)

15246. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.
α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)
β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$. (Μονάδες 15)

15247. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.
α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)
β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$. (Μονάδες 15)

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.
α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$. (Μονάδες 12)
β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$
i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.
(Μονάδες 7)
ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 6)

15618. α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. (Μονάδες 10)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 15)

15653. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$. (Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$. (Μονάδες 5)

β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 12)

15654. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 13)

15674. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$. (Μονάδες 12)

15695. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$. (Μονάδες 12)

15989. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. (Μονάδες 13)

17241. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$. (Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 8)

18230. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$. (Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

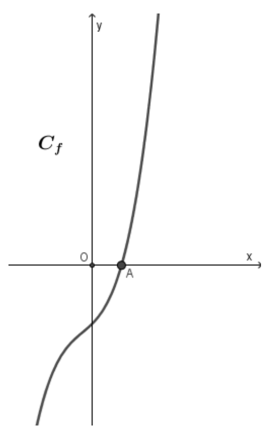
20856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 09)



Θέμα 4ο

14955. Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^{o}C.
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha<\beta<\gamma$ ώστε να ισχύει $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.
(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^{o}C. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;
(Μονάδες 10)

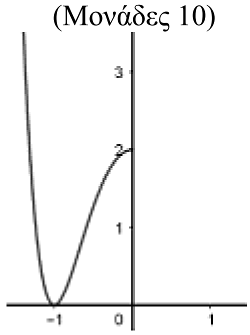
15005. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x′x.
(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x\le 0$.
Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.
(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.
(Μονάδες 6)



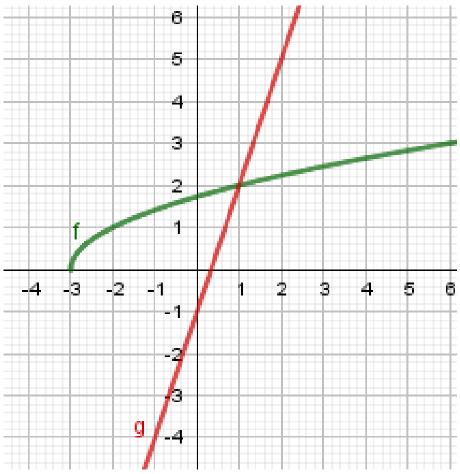
15037. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.
(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
(Μονάδες 6)

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$.
(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.
(Μονάδες 8)



15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 5)

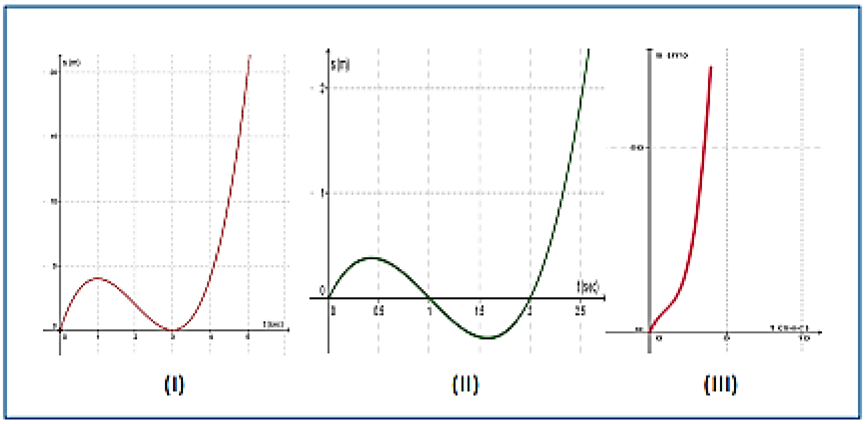
15094. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=2$.
(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων. (Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό. (Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 04)



15174. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta(x)=x^2-3x+2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$. (Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. (Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$. (Μονάδες 7)

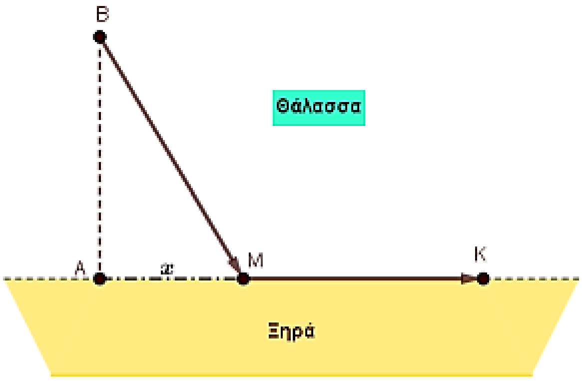
β) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$. (Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$. (Μονάδες 7)

15436. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης , είναι $\upsilon=\frac{s}{t}\Leftrightarrow t=\frac{s}{\upsilon}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM=\sqrt{4+x^2}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5},\ x\in[0,4].$$ (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες. (Μονάδες 10)

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

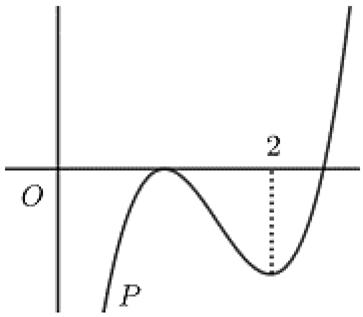
i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι – 1,

να δείξετε ότι: $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \quad\text{και}\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι α = −9 και β = 12. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της P(x) είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της. (Μονάδες 4)



15677. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τίς τιμές των α, β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$. (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=4,\ \beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεσης $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 8)

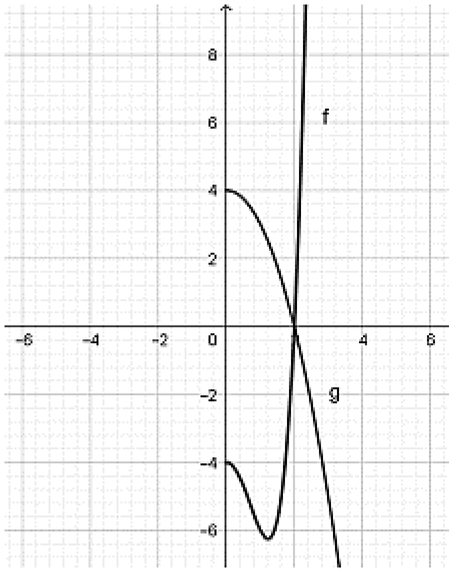
ii. Αν $P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$. (Μονάδες 9)

15790. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παρατάσεων των συναρτήσεων f και g .
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Για $\kappa=0$,

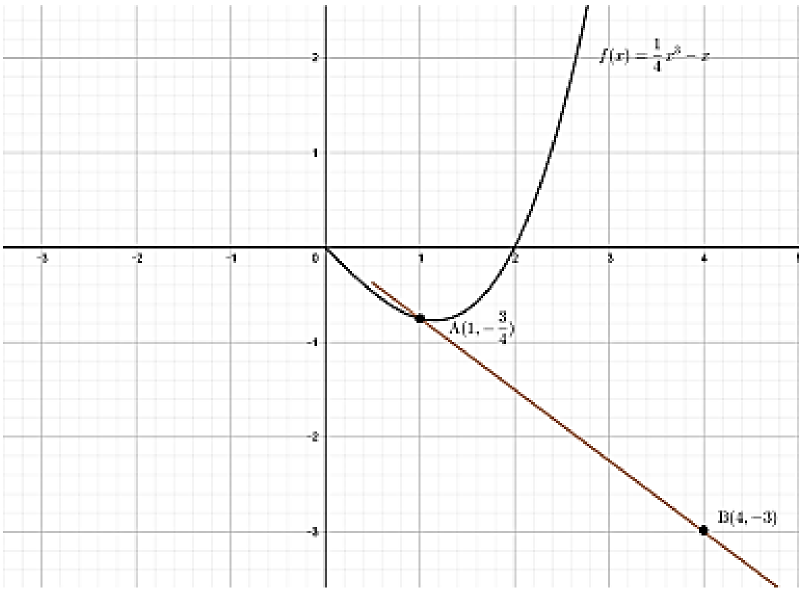
i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$. (Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x.

(Μονάδες 7)

17919. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB. (Μονάδες 6)

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

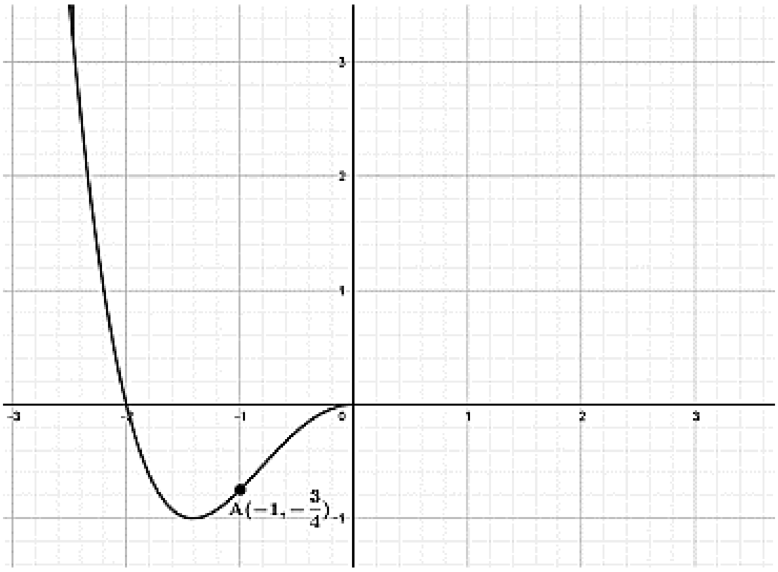
17943. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60m^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3 + x^2 - 3600 = 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

17925. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



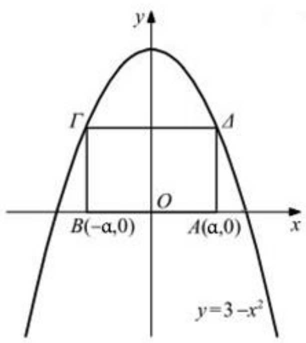
α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$, i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

18221. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι

$$E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$. (Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 03)

21155. Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+bx+c$, όπου οι συντελεστές α, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο A και ο B, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο A επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο B επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο A επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους α, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής A επιλέγει $\alpha=2$, μετά ο B επιλέγει $b=1$ και τέλος ο A επιλέγει πάλι $c=2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2. (Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής A επιλέγει $\alpha=-1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής B, ο A μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$. (Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής A επιλέγει $c=1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής B, ο A μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$. (Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής A επιλέγει $c=2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές α και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13. (Μονάδες 5)

22013. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4+1=\left(x^2+\alpha x+1\right)\cdot\left(x^2+\beta x+1\right)$. (Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα. (Μονάδες 10)

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Θέμα 4ο

15187. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

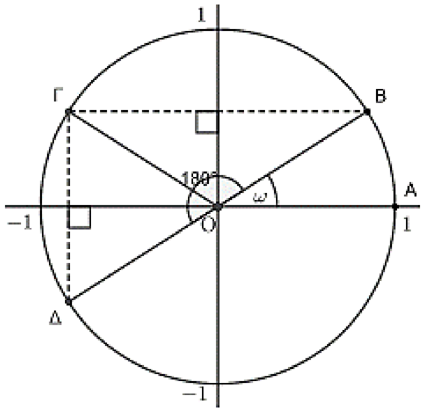
β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω, (Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ, (Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών AOB, $AO\Gamma$ και $AO\Delta$.

(Μονάδες 5)



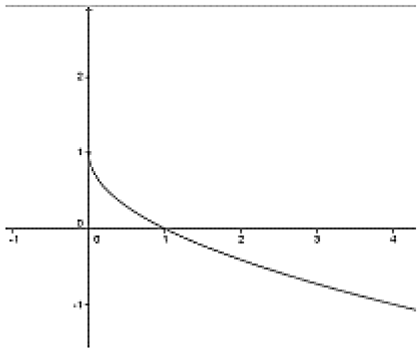
15270. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = \big(2f(\alpha)-1\big)\big(2f(\beta)-1\big)$.

(Μονάδες 10)



γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1-\sqrt{x},\ x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)

15377. Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x. (Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

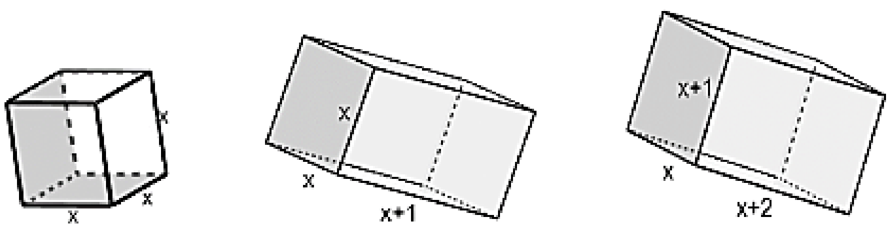
i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β. (Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x). (Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα. (Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

Δεξαμενή Α Δεξαμενή Β Δεξαμενή Γ



20647. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος. (Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \le 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x) = 0$. (Μονάδες 6)

17941. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) . (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $\alpha \ne 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$. (Μονάδες 10)

21240. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

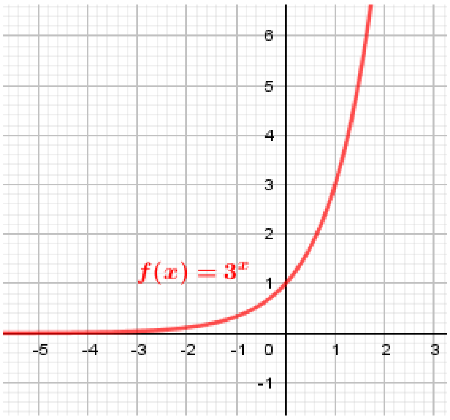
α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$. (Μονάδες 11)

Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση
Εκθετική συνάρτηση
Θέμα 2ο

21451. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x, x\in\mathbb{R}$.



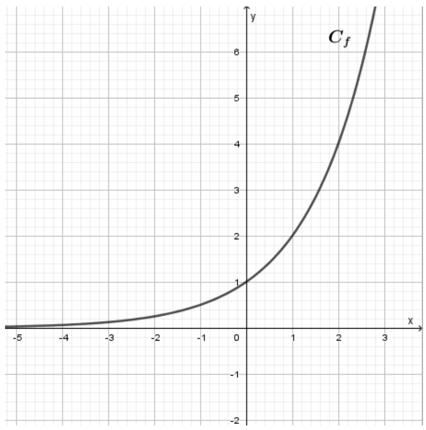
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

(Μονάδες 13)

18866. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x-1=0$.

(Μονάδες 10)

β)

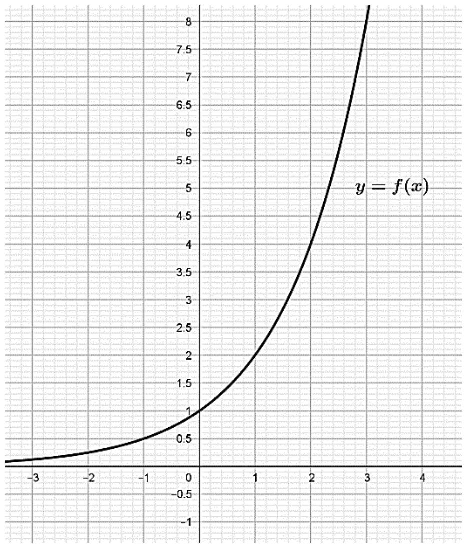
i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 05)

21091. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
f(x)					

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=32$.

(Μονάδες 8)

21163. Δίνεται το σημείο $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση α^x, $0<\alpha<1$, να βρείτε το α.

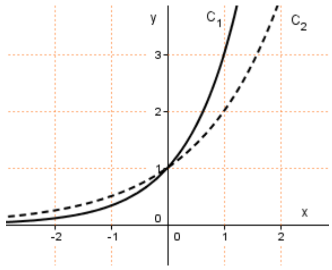
(Μονάδες 13)

β) Για $\alpha=\frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}},\alpha^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 12)

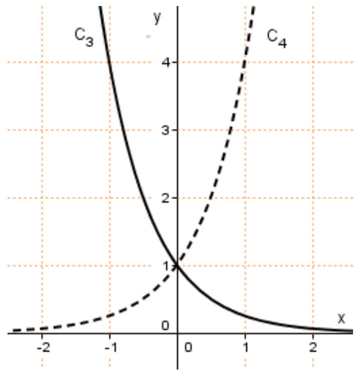
21993.α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x)=3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x)=4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



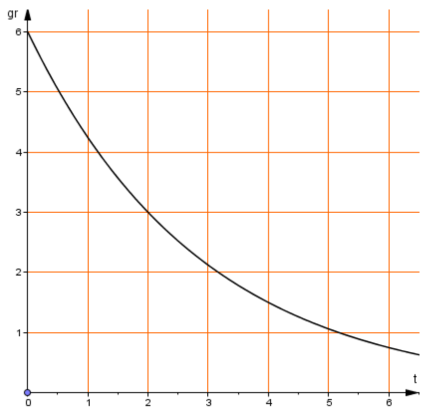
21994. Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η 2η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).

α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 8)

β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 9)

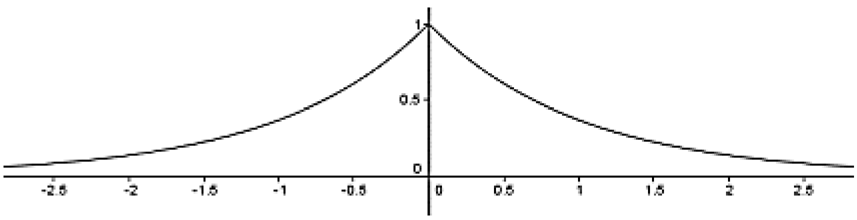
γ) Κατά τη διάρκεια ποιας ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr; (Μονάδες 8)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Θέμα 4ο

15269. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

Α. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ Β. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο (0, 1). (Μονάδες 5)

20854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια. (Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για x=0 και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f. (Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 05)

21471. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

Αν α = 5 και β = - 7

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y . (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$. (Μονάδες 7)

21448. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή t = 0, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του f (t) (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$, $t\geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές f (t) ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0. (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$. (Μονάδες 5)

21444. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\to$ με τύπους $f(x)=4^x$ και $g(x)=2^x-\frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Α , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο Α . (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

19-2-2023

20689. α) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{x-2}{x+1}>0$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη. (Μονάδες 03)

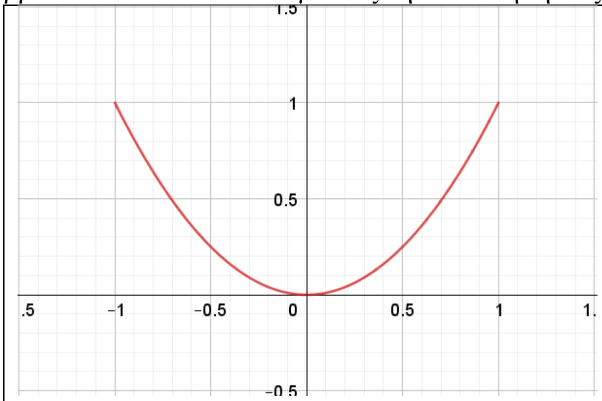
ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα; (Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή. (Μονάδες 05)

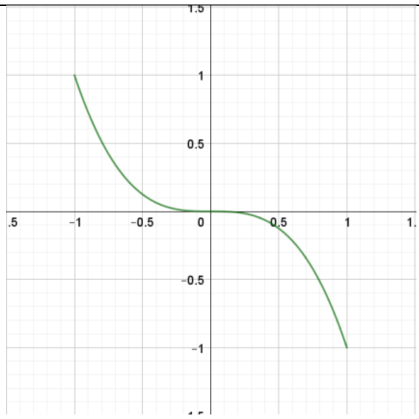
Θέμα 3ο

15023. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1,1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

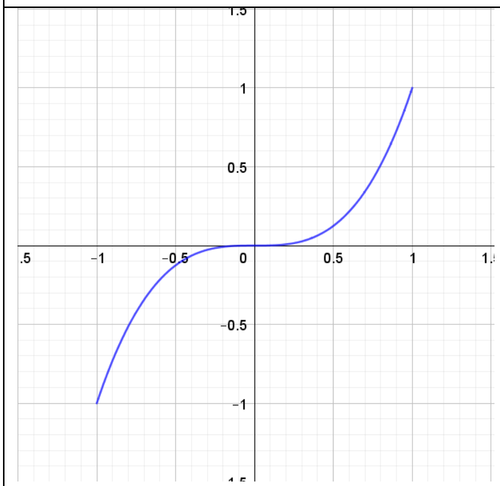
α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f. Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



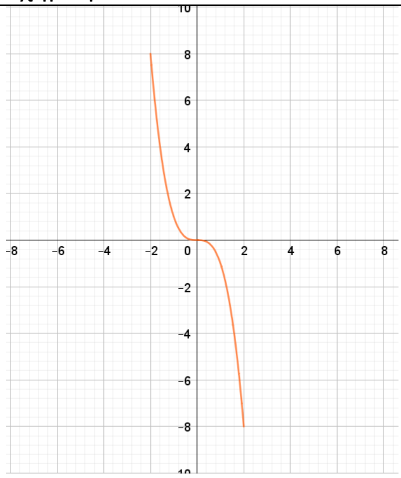
Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ



Σχήμα δ

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+2$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-1)$ (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x)=e^x-1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$. (Μονάδες 7)

Λογάριθμοι

Θέμα 2ο

15687. Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha=16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α. (Μονάδες 12)

15816. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2,\ \beta=\ln 4,\ \gamma=\ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta=\alpha+\gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta+\gamma=5\alpha$. (Μονάδες 13)

15817. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$ και $\beta=\ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

20663. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2\sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=4$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$. (Μονάδες 10)

20710. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 20$ και $\beta=\log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta+\alpha=3$. (Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta+\alpha)>1$. (Μονάδες 6)

γ) $10^\beta-10^\alpha=10\cdot(\beta+\alpha)$. (Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e\simeq 2,71$.

20711. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 3$ και $\beta=\log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι : **i.** $\beta+\alpha>1$. (Μονάδες 6) **ii.** $\ln\frac{\alpha}{\beta}<0$. (Μονάδες 7)

21676. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4=1,386$ και $\ln 5=1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\ln\frac{e}{5}-\ln\frac{4}{e}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80=5\cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80=4,381$. (Μονάδες 13)

21858. Δίνεται η παράσταση $A=2\log 5+2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=2$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda=A$. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln\lambda<0$. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α . (Μονάδες 6)

β) Για α =15

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. (Μονάδες 6)

15474. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e)-e^2-4$. (Μονάδες 4)

15591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του , $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)=14$. (Μονάδες 9)

15822. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι α = -1 και β = 0. (Μονάδες 6)

γ) Με α = - 1 και β = 0,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$. (Μονάδες 6)

15823. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

18110. α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x-1)=0$. (Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x-1)$. (Μονάδες 06)

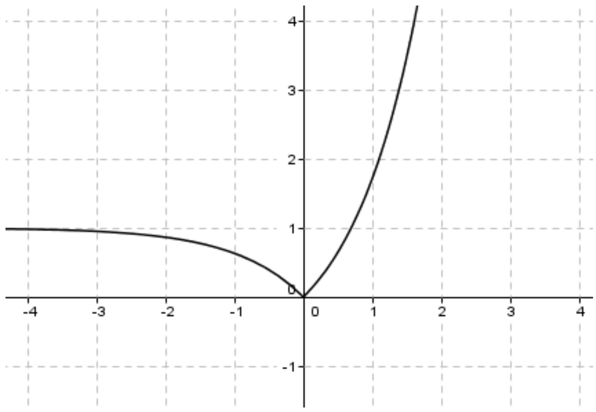
β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$. (Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)

18235. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$. (Μονάδες 7)

18429. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1w/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\ w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D=10\cdot\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$ όπου I_o η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\ w/m^2$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης. (Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο; (Μονάδες 7)

18434. Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I=I_0\cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda>0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

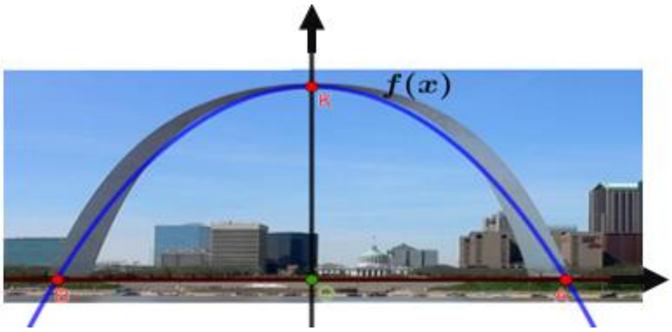
α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν. (Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda=1{,}4m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2=0{,}7$) (Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$. (Μονάδες 10)

18437. Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$$



με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).
(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

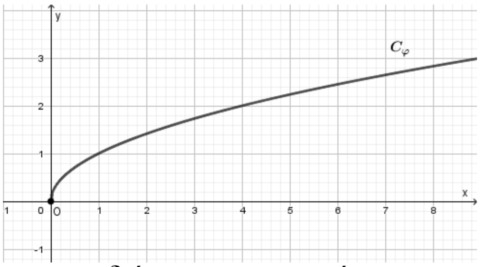
α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι 192 m. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οx. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96$. (Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ. (Μονάδες 5)

18863. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$,

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$



α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g. (Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1+\ln 10}{3}$. (Μονάδες 05)

20657. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$. Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^o\ C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30^o C. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80° C.

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0{,}0672$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά. (Μονάδες 8)

19-2-2023

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right)=-0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cong 0,034$.

20669.α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$. (Μονάδες 03)

iv. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. (Μονάδες 04)

20845.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{\kappa x}$, $\kappa\geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1)-f(0)\geq f(0)-f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Μονάδες 08)

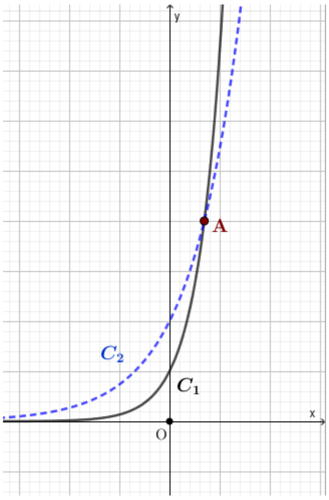
β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x}>2e^{x}$. (Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)=2e^{x}$ και $k(x)=e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A; (Μονάδες 05)



20847. Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο: $D=10\cdot\log(10^{12}\cdot I)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	140 ντεσιμπέλ

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων. (Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου. (Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$). (Μονάδες 10)

Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 2ο

15093. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(10^x-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log(10^{2x}-10^x)$, $x>0$. (Μονάδες 7)

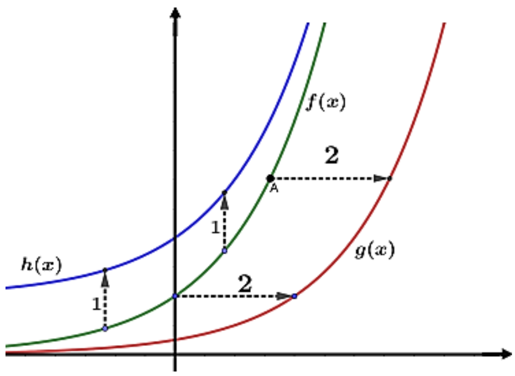
δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$. (Μονάδες 6)

15267. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 13)

15393. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g(x) και h(x), $x\in\mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f(x).



α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των g(x) και h(x) από την γραφική παράσταση της f(x). (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g(x) και h(x). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16. (Μονάδες 9)

15675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. (Μονάδες 15)

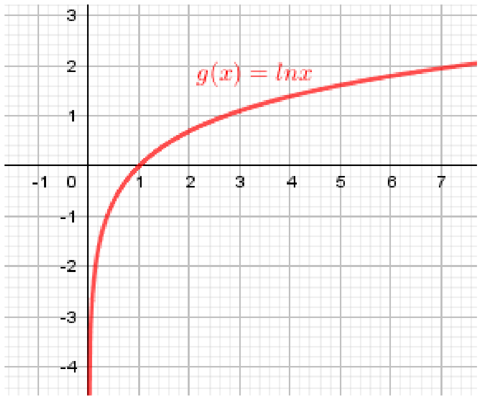
15808. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.

Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 10)



17318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 4$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 4$. (Μονάδες 13)

20635. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$. (Μονάδες 10)

20692. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$, $x>0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$. (Μονάδες 12)

β) Για $x>1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1)+f(x-1)=\log 10-\log 5$. (Μονάδες 13)

20851. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=2\log 6-\log 12$ και $B=\log 5+\log 2$

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log 3$ και $B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A<B$. (Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x<1$. (Μονάδες 08)

21174. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1)=-\log 2-\log(1-x) \quad (1)$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1)=\log\frac{1}{2}-\log(1-x)$. (Μονάδες 15)

21449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$. (Μονάδες 7)

21450. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 13)

21472. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$. (Μονάδες 12)

21473. α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A=\ln x+\ln(x+6)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+\ln(x+6)=\ln 7$. (Μονάδες 15)

21675. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. (Μονάδες 13)

21952. Δίνεται η παράσταση $A=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A=\frac{7}{6}$. (Μονάδες 12)

β) $0<\ln A<1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

21953. Δίνεται η παράσταση $A=e^{\ln 2}+10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A=7$. (Μονάδες 12)

β) $0<\log A<1$. (Μονάδες 13)

Θέμα 4ο

15015. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$. (Μονάδες 10)

15021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0). (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

15679. Δίνεται η παράσταση $A=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=-\ln 3$. (Μονάδες 9)

15690. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$. (Μονάδες 7)

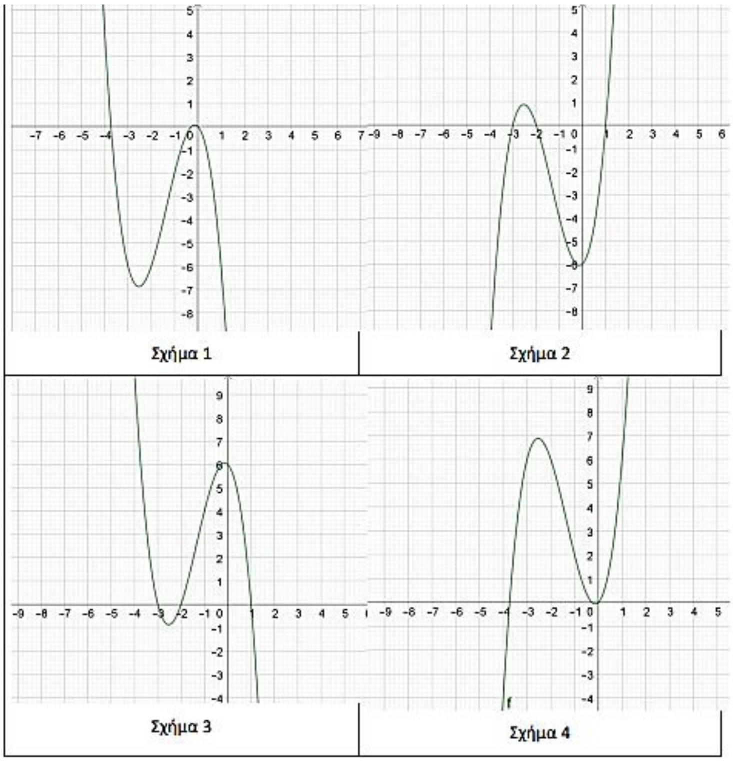
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$.
(Μονάδες 7)

15678. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1. (Μονάδες 8)



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3 Σχήμα 4

15694. Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m-M=5\log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου *d* η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, *m* είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και *M* το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης *d* και ισούται με 3,26 έτη φωτός = $30{,}9\cdot 10^{12}\,\text{km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης *d* το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του; (Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος *m* = 1,157 και βρίσκεται σε απόσταση *d* = 100 parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα; (Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς *d*. (Μονάδες 7)

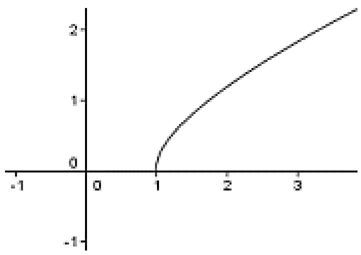
δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος − 5,14. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}}\cong 131$. (Μονάδες 5)

16001. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. (Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

(Μονάδες 7)

18865. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 03)
β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 06)
γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 06)
δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)=\frac{1}{2}(x-1)\ln x$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου $A(1,0),B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$. (Μονάδες 10)

21445. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log3-\log7$. (Μονάδες 9)
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log3-\log7$. (Μονάδες 9)

21446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln2$. (Μονάδες 9)
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq3\ln2$. (Μονάδες 9)

21447. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200e^{ct}$, Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος (t = 0). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι ln(1,64) ≅ 0,5 και ln10 ≅ 2,3)
α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. (Μονάδες 9)

21470. Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0e^{ct}$.Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το 1/3 της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.
α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για t = 0). (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά. (Μονάδες 9)

21474. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.
α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας. (Μονάδες 8)
β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α . (Μονάδες 8)
γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t)=10\cdot(0{,}85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.
(Δίνεται ότι: log(0,5) = - 0,3 και log(0,85) = - 0,07). (Μονάδες 9)

21678. Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.
Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\dfrac{\ln 2}{c}$. (Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο
$Q(t) = Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$ (Μονάδες 8)

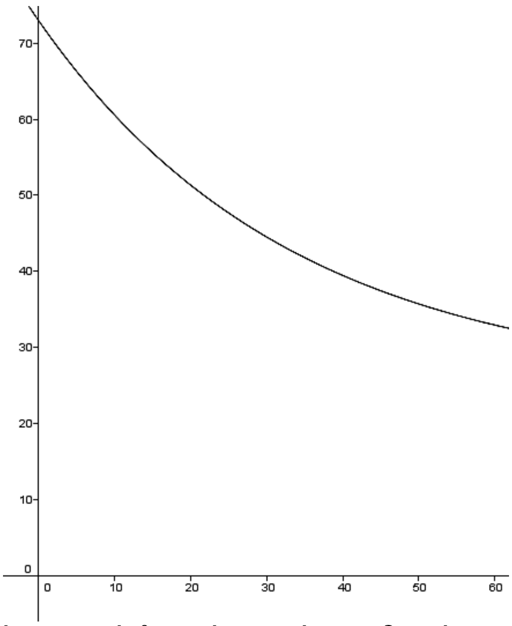
γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού. (Μονάδες 9)

21679. Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρετε, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^o C$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^o C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση
$T(t) = T_\alpha + ce^{-\kappa t}$
όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^o C$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ.
(Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$). (Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$). (Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^o C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό. (Μονάδες 6)

21680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x,\ x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \dfrac{1}{3} f(8)$. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία. (Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία. (Μονάδες 5)

21950. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'. (Μονάδες 9)

21954. Δίνεται η παράσταση $A=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10})$.

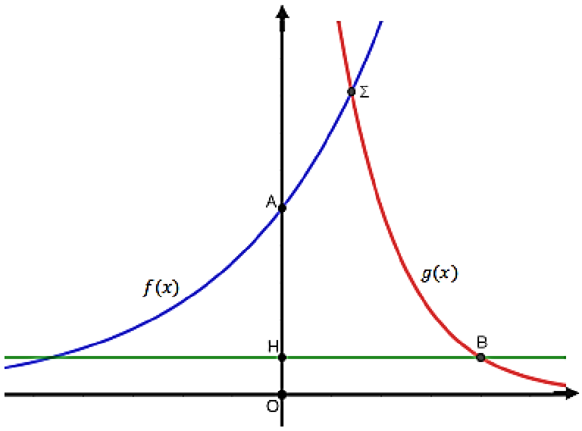
α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10}=10$ (Μονάδες 6) **ii.** $A=1$. (Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2+1)=A$. (Μονάδες 13)

Θέμα 3ο

15392. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$ και $g(x)=5^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x′x τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $H\left(0,\frac{1}{5}\right)$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ. (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B-x_\Sigma=\log 20$ (Μονάδες 7)

15676. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον x΄x. (Μονάδες 10)