

$\int \pi (R^2 - r^2) dx$
 $6 - x^2 = R$
 $\pi \int (6 - x^2)^2 - r^2 dx$
 $\pi \int (6 - x^2)^2 - (2)^2 dx$
 $\pi \int_{-2}^2 (6 - x^2)^2 - 4 dx$
 $\pi \int_{-2}^2 36 - 12x^2 + x^4 - 4 dx$

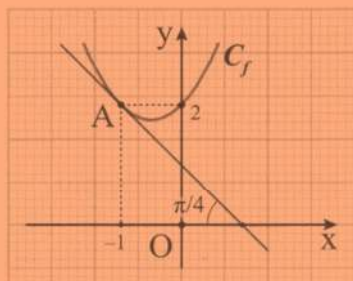
limits
 $x = 4$
 $x = x^2$

(x, y)
 $(x, 6)$
 (x, x^2)

$6 - x^2 = R$
 $2 = r$

1. Εξίσωση εφαπτομένης - Βασικές ασκήσεις

16.11 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A.



16.12 Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f(x) = x^4 - 5x + 6$, $M(1, f(1))$
- β) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, $M(0, f(0))$
- γ) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$, $M(1, f(1))$
- δ) $f(x) = x \ln x$, $M(e, f(e))$

16.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$. Να βρείτε:

- α) την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
- β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

16.14 Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, όταν:

- α) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$
- β) $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

16.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5x$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

16.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = 4x - 1$.

α) Να βρείτε την f' και τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ).

16.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f , οι οποίες είναι κάθετες με την ευθεία (η): $x + 3y - 2 = 0$.

16.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

β) Να βρείτε το σημείο M, αν η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Ποια είναι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

16.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Να βρείτε:

- α) την παράγωγο της f στο $x_0 = a$,
- β) τις εφαπτομένες της C_f , οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(3, -4)$.

16.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Θέμα εξετάσεων)

16.21 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 4x + 11$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:

- α) είναι παράλληλη στον άξονα x' ,
- β) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 2004$,
- γ) είναι κάθετη στην ευθεία $x + 8y + 1 = 0$,
- δ) διέρχεται από το σημείο $A(6, -2)$.

16.22 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f η οποία:

α) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση:

$$2x + y + 1 = 0$$

β) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση:

$$x + 4y + 2 = 0$$

γ) διέρχεται από το σημείο $A(5, -2)$.

16.23 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4$ στα οποία οι εφαπτομένες της C_f να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^5$;

2. Κοινή εφαπτομένη - Εύρεση παραμέτρων

16.24 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της:

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

16.25 Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = 3x - 5$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

16.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(0, -f(\xi))$ εφάπτεται της C_f στο A .

16.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο A .

16.28 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = -x^2 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$$

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, -4)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη εφάπτεται και στη C_g .

16.29 Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση:

$$y = -4x + 4$$

εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρ-

τήσεων $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

16.30 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(1) = 1$ και $g(x) = f(x^3 + x + 1) - 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- β) Να βρείτε την τιμή $g'(0)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται της C_g στο σημείο $B(0, g(0))$.

16.31 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + (a + 1)x - \beta$$

Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = 2x + 3$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(-1, 1)$.

16.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των a και β έτσι, ώστε η C_f να εφάπτεται της ευθείας (ε): $y = 3 - 5x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$.

16.33 Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = ax + \frac{x-1}{x}$$

στο σημείο της $A(1, 1)$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = 2x^2 + (4a + \beta)x + a$$

3. Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο

16.34 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$$

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β) Να αποδείξετε ότι στο κοινό τους σημείο οι C_f , C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.
- γ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη.

16.35 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x+1)(x-3) \text{ και } g(x) = \frac{x-8}{x}$$

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , C_g .
- β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα από τα δύο κοινά τους σημεία.
- γ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη.

16.36 Να βρείτε τα $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = ax^2 + 3 \text{ και } g(x) = \frac{2}{x}$$

να έχουν κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη.

16.37 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + ax - 1 \text{ και } g(x) = x^3 + x^2 + 2ax + 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

οι οποίες έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη. Να βρείτε:

- α) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και το σημείο επαφής,
- β) την κοινή εφαπτομένη.

16.38 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x \ln x \text{ και } g(x) = ax^2 + \beta x + 1$$

να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, το οποίο βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

4. Κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο

16.39 Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g , όπου $f(x) = 2x^2 + 2x$ και $g(x) = x^2 + 1$.

16.40 Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 7x + 16$

β) $f(x) = 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 3x + 3$

16.41 Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ και } g(x) = -2x^2$$

5. Θεωρητικές ασκήσεις

16.42 Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = x \ln x - ax$$

στο σημείο της $M(1, f(1))$, διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

16.43 Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση $y = -1$ άγονται κάθετες εφαπτομένες στην παραβολή με εξίσωση:

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

16.44 Δίνεται η παραβολή $(C): y = \frac{1}{2}x^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) από κάθε σημείο $M(a, \beta)$ με $2\beta < a^2$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της παραβολής,

β) αν το σημείο M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$, τότε οι εφαπτομένες της (C) που διέρχονται από το M είναι κάθετες.

16.45 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$ άγονται κάθετες εφαπτομένες προς τη γραφική παράσταση της f .

16.46 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$3f(x) - 2f(3-x) = x^2 + 12x - 18$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες προς τη C_f , οι οποίες άγονται από το σημείο $K\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.

16.47 Δίνονται οι παραβολές:

$$(C_\mu): y = x^2 - 2\mu x + 2\mu + 3, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι παραβολές αυτές διέρχονται από σταθερό σημείο.

β) Να βρείτε εκείνα τα $\mu \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι (C_μ) εφάπτονται στον άξονα x' .

16.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x-y) = f(x)f(y) + \eta\mu x \cdot \eta\mu y$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 1$,

β) $f^2(x) = \sin^2 x$,

γ) η f είναι άρτια,

δ) $f(2x) = f^2(x) - \eta\mu^2 x$,

ε) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$,

στ) η κλίση της f στο $\frac{\pi}{3}$ είναι $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.49 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, από τις οποίες η f είναι μία φορά και η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ακόμα ισχύει:

$$g^2(x) + (g'(x))^2 = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $M(a, \beta)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $h(x) = f(x)g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $g'(a) = 1$ και $g(a) + g''(a) = 0$,

β) $g(a) = 0$,

γ) οι C_f, C_h έχουν στο σημείο M κοινή εφαπτομένη.

16.50 Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει την ίδια κλίση στα σημεία της με αντίθετες τετμημένες.

16.51 Για μια πολωνυμική συνάρτηση $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές ισχύει ότι:

$$2P(x) = [P'(x)]^2 - 2x^2 + 4x - 10, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη γενική μορφή του $P(x)$.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_p που διέρχονται από το σημείο $B(-2, 1)$.

16.52 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x) + y) = f(x + y) + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + f(0)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται της C_g , όπου:

$$g(x) = \ln x + 3, \quad x > 0$$

6. Συμπληρωματικές ασκήσεις

16.53 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε την f' και την f'' .

γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντιες εφαπτομένες και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο

σημείο $M(-1, f(-1))$.

16.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \ln(x + 2)$$

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού A της $f(x)$,

β) τη συνάρτηση $f'(x)$,

γ) το πρόσημο της $f'(x)$,

δ) την κλίση της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον άξονα $x'x$.

16.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε την παράγωγο της f .
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντιες εφαπτομένες.
- ε) Να βρείτε το πρόσημο της f' .

16.56 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- α) Να βρείτε την f' .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(\theta) = 0$.
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- δ) Να βρείτε τις οριζόντιες εφαπτομένες της C_f .

16.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.
Να βρείτε:

- α) την $f'(x)$,
- β) τον συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης στο A ,
- δ) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τους άξονες.

16.58 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .
- β) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στα κοινά τους σημεία έχουν κάθετες εφαπτομένες.

16.59 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(a, f(a))$, $a \neq 0$, έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N ,

β) η κλίση της f στο N είναι τετραπλάσια από την κλίση της f στο M .

16.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτομένες της C_f , οι οποίες να είναι παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^7$;

16.61 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τους a, β, γ έτσι, ώστε η C_f να έχει στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία (η) : $4x - y - 2 = 0$.

16.62 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + \lambda}{x - 1}$$

να εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων.

16.63 Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 - 2x \ln x$ στο σημείο $M(1, f(1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

16.64 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2-1}$$

Να βρείτε την τιμή του a έτσι, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ να είναι παράλληλη με την ευθεία (ϵ) : $13x + 9y - 10 = 0$.

16.65 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x^2 + \lambda x + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

16.66 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 + (1 - \lambda)x + 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στο ση-

μείο $M(1, f(1))$ διέρχονται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

16.67 Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο μεταβλητό σημείο της $M(a, f(a))$, με $a > 0$, τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = a$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M .

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B ως συνάρτηση του a .

δ) Να αποδείξετε ότι $(AM) = (MB)$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του a και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ως προς a .

16.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2}{x}$, $a \neq 0$, και ένα μεταβλητό σημείο M της C_f . Αν η εφαπτομένη της C_f στο M τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A , B , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB έχει σταθερό εμβαδόν.

16.69 Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \leq x < 6 \end{cases}$$

στα κοινά της σημεία με την ευθεία:

$$(η): x - 5y + 6 = 0$$

είναι κάθετες.

16.70 Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

α) την παράγωγο της f στο $x_0 = 3$,

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$.

16.71 Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(e^{-x}) = x^2 + 2x + 3$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

16.72 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει:

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

οι f, g, h είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και:

$$h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$$

να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στα κοινά τους σημεία κοινή εφαπτομένη.