

# ΜΑΤΗΗ ROCKS

## Προτεινόμενες ασκήσεις

### 1. Εύρεση πεδίου ορισμού

**1.14** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x + 3$ .

- α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της  $f$ ;  
β) Να βρείτε τις τιμές των  $0, 1, -1$  και  $2$ .  
γ) Ποια  $x$  έχουν τιμή το  $5$ ;  
δ) Να αποδείξετε ότι:  
 $f(1-x) - f(2-x) - 2x + 4 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**1.15** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$$

- α) Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$  και  $f(2)$ .  
β) Να αποδείξετε ότι το  $y = 4$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ .

**1.16** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- α)  $f(x) = x^5 + 3x^2 - x + 2$   
β)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$   
γ)  $f(x) = \ln(e^x + 2)$   
δ)  $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

**1.17** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}$

β)  $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

γ)  $h(x) = \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{x-2}{x^2-1}$

δ)  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x-3}$

ε)  $\omega(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x^2-x-1} + \frac{x^2-3}{x^3+x^2-4x-4}$

**1.18** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \sqrt{x-2}$

β)  $g(x) = \sqrt{5-x}$

γ)  $h(x) = \sqrt{x^2-4}$

δ)  $\varphi(x) = \sqrt{16-x^2}$

ε)  $\omega(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

στ)  $\kappa(x) = \sqrt{12-x-x^2}$

**1.19** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \ln(2-x)$

β)  $g(x) = \ln(x-3)$

γ)  $h(x) = \ln x^2$

δ)  $\varphi(x) = \ln(1-x^2)$

ε)  $\omega(x) = \ln \frac{5-x}{x+7}$

$$\sigma\tau) \kappa(x) = \ln \frac{x+3}{x-5}$$

**1.20** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x}{|x-3|-2} + \frac{3}{|7-2x|-1}$$

$$\beta) g(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|}$$

**1.21** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των επόμενων

συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{5+4x-x^2}}{\ln x}$$

$$\beta) g(x) = \frac{x^2+x+1}{9^x-4 \cdot 3^{x+1}+27}$$

$$\gamma) \kappa(x) = \ln \frac{x+5}{5-x} + 3 \ln \frac{x-1}{x-3}$$

$$\delta) \varphi(x) = \sqrt{3-|x-2|} + \ln \frac{2-x}{3+x}$$

## 2. Γραφική παράσταση - Σχετική θέση των $C_f, C_g$

**1.22** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x + 1$$

Να εξετάσετε ποια από τα σημεία:

$$A(0, 2), B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \Gamma(\pi, 3) \text{ και } \Delta\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$$

ανήκουν στη γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$ .

**1.23** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η  $C_f$  να διέρχεται από το σημείο  $A$ , όταν:

$$\alpha) f(x) = x^2 + \lambda^2 x + 6 \text{ και } A(2, 28)$$

$$\beta) f(x) = x^3 + \lambda^2 x + \lambda x + 4 \text{ και } A(-1, -3)$$

**1.24** Να βρείτε τα κοινά σημεία του άξονα  $x'x$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , όταν:

$$\alpha) f(x) = \ln^2 x - \ln x \quad \beta) f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$$

$$\gamma) f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \quad \delta) f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$$

**1.25** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των  $C_f$  και  $C_g$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = 2x - 1$$

$$\beta) f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = x^2 + x - 1$$

$$\gamma) f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3 \text{ και}$$

$$g(x) = 3x^2 + x - 1$$

**1.26** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τη  $C_g$ , όταν:

$$\alpha) f(x) = 2x + 3 \text{ και } g(x) = x^2$$

$$\beta) f(x) = x - 1 \text{ και } g(x) = \sqrt{x} + 1$$

**1.27** Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^4 - (a+1)x^2 + \beta x + 3 \text{ και}$$

$$g(x) = (a+2)x^2 + (2-\beta)x - 1$$

τέμνονται πάνω στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ , να βρείτε:

**α)** τις τιμές των  $a$  και  $\beta$ ,

**β)** τα άλλα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$ .

**1.28** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - \beta x^3 - (a+1)x^2 + (2a+\beta)x + \beta + 3$$

**α)** Να βρείτε τα  $a, \beta$ , ώστε η  $C_f$  να διέρχεται από τα σημεία  $M(1, 8)$  και  $N(-2, 20)$ .

**β)** Αν  $a = 2, \beta = 3$ , να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $C_f$  τέμνει τους άξονες, καθώς και τη σχετική θέση της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .

**1.29** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 6x + 11 \text{ και } g(x) = -\frac{6}{x}$$

**α)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$  και να αποδείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

**β)** Να βρείτε τη σχετική θέση των  $C_f$  και  $C_g$ .

**1.30** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} \text{ και } g(x) = 2^{x+2} - 8$$

**α)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$ .

**β)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  είναι πάνω από τη  $C_g$ .

**1.31** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ και } g(x) = \lambda x + 2 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση της  $g$  διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

β) οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινά σημεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**1.32** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda + 5$$

με  $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$ :

i) να τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο ακριβώς σημεία,

ii) να εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ .

β) Να αποδείξετε ότι όταν το  $\lambda$  διατρέχει το  $\mathbb{R} - \{1\}$ , τότε η  $C_f$  διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.

**1.33** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \lambda x^3 + (\lambda^2 + 3\lambda + 1)x^2 + (2\lambda^2 - \lambda + 2)x - 3\lambda^2 - 3\lambda - 2$$

διέρχεται από δύο σταθερά σημεία, καθώς το  $\lambda$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ .

### 3. Σύνολο τιμών

**1.34** Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

β)  $f(x) = e^{x-2} + 3$

γ)  $f(x) = \ln(x-2)$

δ)  $f(x) = \frac{x-2}{x+3}, x \in [-2, 2]$

ε)  $f(x) = \sqrt{x-2}$

στ)  $f(x) = (x-1)^2 - 2$

ζ)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

η)  $f(x) = 2\eta\mu x + 1$

**1.35** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της  $f$ .

γ) Να εξετάσετε αν το 5 ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**1.36** Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 3\beta x + 3}{x^2 - x + 1}$  να έχει σύνολο τιμών το  $[-3, 5]$ .

### 4. Άρτια - Περιττή - Περιοδική συνάρτηση

**1.37** Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή.

α)  $f(x) = |x-2| - |x+2|$

β)  $f(x) = x^2 + \chi_{\eta\mu x}$

γ)  $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1, x \in [-1, +\infty)$

δ)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < -1 \\ x^4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

**1.38** Να εξετάσετε ποια από τις επόμενες συναρτήσεις είναι άρτια και ποια περιττή.

α)  $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x-1| + |x+1|}$

β)  $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+2}$

γ)  $f(x) = \begin{cases} 1-x+x^2, & \text{αν } x \leq -1 \\ 1+x+x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

δ)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & \text{αν } x \leq -2 \\ -x^2 + 4x - 5, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

Να βρείτε τις συμμετρίες της  $C_f$  σε κάθε περίπτωση.

**1.39** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1, & \text{αν } x \leq -2 \\ 2x^3 + 1, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

β) Να εξετάσετε αν η  $C_f$  έχει άξονα ή κέντρο συμμετρίας.

**1.40** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ ,

β) η  $f$  είναι περιττή,

γ) η  $C_f$  έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα  $x'x$ .

## 5. Χάραξη γραφικής παράστασης

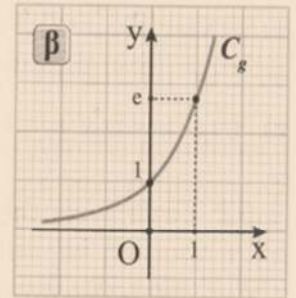
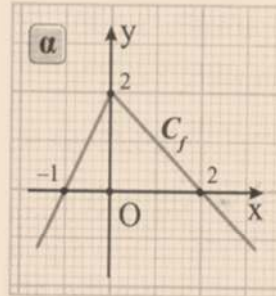
**1.41** Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = x - 2$

β)  $f(x) = 3 - 2x$

γ)  $f(x) = |x + 1|$

δ)  $f(x) = |1 - x|$



**1.42** Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

β)  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

**1.46** Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \sqrt{|x + 1|}$

β)  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

**1.43** Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \eta\mu 2x$

β)  $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$

γ)  $f(x) = e^{-x} + 1$

δ)  $f(x) = \ln(x - 1) + 2$

ε)  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

στ)  $f(x) = -2\eta\mu x + 3$

**1.47** Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) i)  $f(x) = \sqrt{|x - 1|}$       ii)  $g(x) = |\eta\mu x|$

β) i)  $f(x) = e^{|x|}$       ii)  $g(x) = |e^x - 1|$

**1.48** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1| + 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**1.44** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ 3x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**1.49** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ \beta\sqrt{x} - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 1)$  και  $B(4, 3)$ , να χαράξετε τη  $C_f$ .

**1.50** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**1.45** Να βρείτε τις συναρτήσεις, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα επόμενα σχήματα:

## 6. Συναρτησιακές σχέσεις

**1.51** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

α)  $f(1-x) + f(x) = x^3 + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β)  $f(1-x) - f(x) = x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

γ)  $f(x) + f(3-x) = x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ)  $f^2(x^2) + f(2^x) + 1 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ε)  $f^2(x^3) - f(3^x) + 1 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**1.52** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο τουλάχιστον σημεία στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $f(x^2) + f(3x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β)  $f(x^2 - 3x) + f(2x - 6) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**1.53** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) - f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α)  $f(0) = 0$ ,

β)  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.54** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$(f(x) - y)(f(y) - x) = 2xy - x^2 - y^2 \\ \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

**1.55** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$xf(x) - xyf(x)f(y) \geq \frac{1}{4} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**1.56** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:

$$x[f(x) + f(-x) + 2] + 2f(-x) = 0 \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**1.57** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α)  $f^2(x) + x^2 = 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β)  $f(x)f(y) + xy = xf(y) + yf(x)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

γ)  $f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = xy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

**1.58** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α)  $f(0) = 0$ ,

β) η  $f$  είναι περιττή,

γ)  $f(x-y) = f(x) - f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

δ)  $f(vx) = vf(x)$  για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$ .

**1.59** Δύο συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχουν τις ιδιότητες:

$$f^2(x) = f(x)f(-x) \text{ και } g^2(x) = -g(x)g(-x) \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) η  $f$  είναι άρτια,

β) η  $g$  είναι περιττή.

**1.60** Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) = xf(x) + yf(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \\ \text{να αποδείξετε ότι } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**1.61** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:

$$2f(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 1$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της  $f$ .

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x-2)$ .

**1.62** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x-2) + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.63** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \geq x \text{ και } f(x+y) \geq f(x) + f(y) \\ \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $f(0) = 0$ ,  
β)  $f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.64** Μια περιττή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα  $x^2 f(x) \leq x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ .  
β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .  
γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = |f(x-1)|$ .  
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $g$ .

**1.65** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:  
 $f(x) + f(x-1) = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $f(x+2) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  
β) η  $f$  είναι περιοδική,  
γ) υπάρχει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ , η οποία τέμνει τη  $C_f$  σε τρία τουλάχιστον σημεία.

**1.66** Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την αντίστοιχη ιδιότητα:

- α)  $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   
β)  $f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq e^{x+y}$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$

## Η κατανόηση της θεωρίας

**1.67** Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Έστω μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .  
i) Τι λέμε εικόνα ή τιμή του  $x$  και πώς συμβολίζεται;  
ii) Τι λέμε σύνολο τιμών της  $f$  και πώς συμβολίζεται;  
iii) Τι λέμε γραφική παράσταση της  $f$  και πότε ένα σημείο  $A(x_0, y_0) \in C_f$ ;  
β) Πώς βρίσκουμε από τη  $C_f$  το πεδίο ορισμού και πώς το σύνολο τιμών της  $f$ ;  
γ) Πώς βρίσκουμε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τους άξονες;  
δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i)  $f(x) = ax + \beta$   
ii)  $f(x) = ax^2$   
iii)  $f(x) = ax^3$   
iv)  $f(x) = \frac{a}{x}$  (με  $a \neq 0$ )  
v)  $f(x) = a^x$  ( $0 < a \neq 1$ )  
vi)  $f(x) = e^x$   
vii)  $f(x) = \ln x$   
viii)  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $f(x) = \sqrt{|x|}$

**1.68** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ή σχέσεις:

- α) Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε:  
i)  $f(A) = \dots\dots\dots$   
ii)  $M(\alpha, \beta) \in C_f \Leftrightarrow \dots\dots\dots$   
β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:  
 $f(x) = \frac{a}{x}, \alpha \neq 0$   
έχει  $\dots\dots\dots$  συμμετρίας, ενώ της συνάρτησης  $f(x) = ax^2$  έχει  $\dots\dots\dots$  συμμετρίας.

**1.69** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

- α) Για να είναι η διαδικασία  $f$  από το  $A$  στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση, πρέπει κάθε  $x \in A$  να έχει μία τουλάχιστον τιμή  $f(x) \in \mathbb{R}$ .  
β) Αν η  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση και  $y_0 \in f(A)$ , τότε υπάρχει το πολύ ένα  $x_0 \in A$ , ώστε  $f(x_0) = y_0$ .  
γ) Αν υπάρχει ευθεία παράλληλη προς τον  $x'x$  που τέμνει μια γραμμή  $C$  σε δύο τουλάχιστον σημεία, τότε η  $C$  δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.  
δ) Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε η  $C_f$  αποτελείται από τα σημεία  $M(x, f(x))$ , με  $x \in A$  και μόνο.

ε) Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $0 \in A$ , τότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B(0, f(0))$ .

στ) Δεν υπάρχει συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(a) = \beta$ ,  $f(a) = \gamma$  και  $\beta \neq \gamma$ , όπου  $a \in A$ .

ζ) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας και μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας.

η) Αν  $f(-x) = f(x)$  για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f$  είναι περιττή συνάρτηση.

θ) Οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $|f|$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

ι) Η γραφική παράσταση της  $f$  είναι συμμετρική με τη γραφική παράσταση της  $-f$  ως προς τον άξονα  $x'x$ .

### Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

**Θ1.1** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Θ1.2** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) \leq x^3 \quad \text{και}$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$$

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το  $f(0)$ .

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + f(-x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f(x)$ .

δ) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη  $C_f$ .

**Θ1.3** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια μη σταθερή συνάρτηση με τις ιδιότητες:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{και}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α)  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  και  $f(-1) = 1$ ,

β) η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια,

γ) ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(x) = x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Θ1.4** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f(x+y)f(x-y) = x^2 - y^2 \quad (1)$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το  $f(0)$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $f^2(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

δ) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση (1).