



Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Θεώρημα Bolzano και ύπαρξη ρίζας

11.7 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στα διαστήματα που αναφέρονται.

α) $(x-1)^2(x+3) + (x+2)^2(x-3) = 0$,
 $x_0 \in (1, 3)$

β) $(x-\pi) \cdot \eta\mu x = (2x-\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu x$,
 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

γ) $(x-2)(x^{10}+1) + (x-1)(x^8+3) = 0$,
 $x_0 \in (1, 2)$

δ) $(3x-\pi) \cdot \epsilon\phi x + (4x-\pi) \cdot \sigma\phi x = 0$,
 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

ε) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = x$,
 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

11.8 Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\frac{\eta\mu x}{2x-\pi} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x+\pi}$

β) $\frac{x^{2006} + 2006}{x-1} + \frac{x^{2007} + 2007}{x-2} = 0$

έχουν από μία τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $(1, 2)$ αντίστοιχα.

11.9 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στα διαστήματα που αναφέρονται.

α) $5x^3 + \Gamma = 3x + 6x^2$, $x_0 \in (0, 1)$

β) $\ln x = \frac{1}{x}$, $x_0 \in (1, e)$

γ) $\frac{x^6+1}{x-1} + \frac{x^{10}+1}{x-2} = 0$, $x_0 \in (1, 2)$

δ) $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$, $x_0 \in (1, 2)$

2. Ύπαρξη περισσότερων ριζών

11.10 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 - 6x^2 + 3 = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

11.11 Αν $\alpha > 0$ και $\alpha + \beta + 1 < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 + \alpha = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

11.12 Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 0, \quad \alpha + \gamma > 0 \quad \text{και} \quad \delta > 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

11.13 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στα διαστήματα:

α) $\Delta_1 = (-\pi, \pi)$

β) $\Delta_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

11.14 Να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις έχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στα διαστήματα που αναφέρονται.

α) $2(x - \alpha)(x - \beta) + 4(x - \beta)(x - \gamma) + 5(x - \alpha)(x - \gamma) = 0$

στο διάστημα (α, γ) με $\alpha < \beta < \gamma$

β) $3\sin x = x + 2$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

11.15 Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1}{x - \alpha} + \frac{3}{x - \beta} + \frac{5}{x - \gamma} = 0$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

3. Ύπαρξη και μοναδικότητα ρίζας

11.17 Έστω:

$$f(x) = x^5 + 3x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

β) η εξίσωση $x^5 + 3x = 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

11.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sin x - 3\eta\mu x + 1$$

Να αποδείξετε ότι:

11.16 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x + 1} + \frac{\mu^2}{x - 1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1 και ρ_2 , να αποδείξετε

$$\text{ότι } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}.$$

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$,

β) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε:

$$\eta\mu x_0 = \frac{1}{3}(1 + \sin x_0)$$

11.19 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$.

11.20 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική θετική ρίζα $x_0 \in (1, e)$.

4. Ύπαρξη με βοηθητική συνάρτηση

11.21 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) = \alpha$ και $f(1) = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\gamma) = \gamma$$

11.22 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$, $f(1) = 3$ και $f(5) = 2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία:

$$(\varepsilon): y - x = 0$$

11.23 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha\beta > 0$, $f(\alpha) = 2\alpha$, $g(\beta) = 2\beta$ και:

$$f(x) < 1 < g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\gamma)g(\gamma) = 2\gamma$$

11.24 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

και το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

$$f(\alpha) = g(\beta) = \alpha, \quad g(\alpha) = f(\beta) = \beta$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(g(\xi)) + g(f(\xi)) = 2\xi$.

11.25 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1) \quad \text{και} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$$

Αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με:

$$f(\alpha) = \alpha \quad \text{και} \quad g(\beta) = \beta$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\gamma)g(\gamma) = \gamma$$

11.26 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0, 1)$ και οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$\lambda f(\xi) + (1 - \lambda)g(\xi) = \xi$$

11.27 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)(f(x) - 2) = -2x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

11.28 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(\alpha) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

11.29 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\gamma) = \frac{1}{\alpha - \gamma} + \frac{1}{\beta - \gamma}$$

5. Ύπαρξη σε κλειστό διάστημα

11.32 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f^2(\alpha) + f(\alpha)f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\gamma \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(\gamma) = 0$.

11.33 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν:

$$f(0) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad f(x) \leq g(x) \\ \text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) \cdot \eta\mu^2 x + g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

11.34 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ με:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\xi) = \xi^v, \quad \text{όπου } v \in \mathbb{N}^*$$

11.35 Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και $\alpha\beta > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\alpha} = \frac{\beta}{\xi}$$

11.30 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{και}$$

$$g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{με } \gamma \neq 0$$

Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

11.31 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 4]$ με:

$$f(1) + f(2) = f(3) + f(4), \quad f(1) \neq f(2)$$

$$\text{και } f(3) \neq f(4)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$$

β) η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

11.36 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$ με:

$$0 < f(x) \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 3]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 3]$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0) = 3f(x_0) - x_0$.

11.37 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, 4]$, με $f(0) = f(4)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - f(x + 2), \quad \text{με } x \in [0, 2]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η h είναι συνεχής συνάρτηση,

β) η εξίσωση $f(x) = f(x + 2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 2]$.

11.38 Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $f(0) = f(2\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 2\pi)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = f(\pi + \xi)$.

11.39 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[1, 2]$ με $f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\gamma) = f\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)$$

11.40 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [0, 2]$ τέτοια, ώστε:

$$\beta - \alpha = 1 \quad \text{και} \quad f(\beta) - f(\alpha) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$$

11.41 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με:

$$f(1) + f(2) + f(3) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

11.42 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με:

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική λύση.

11.43 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{x-1} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.

β) Αν ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \xi$.

11.44 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

11.45 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2013} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\dots$, $(2012, 2013)$.

11.46 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = 2012x^{2013} + 2011x^{2012} + \dots + 1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.