

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mathematics

$$y = a \cdot x^2$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Εύρεση προσήμου

12.7 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το πρόσημο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(2013) = 2014$ **β)** $f(2015) = -2016$

12.8 Η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$. Επιπλέον είναι:

$$f(0) = 3, f(2) = -5, f(5) = -4 \text{ και } f(10) = 7$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$.

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $f(-5)$, $f(6)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	4	8	$+\infty$
$f(x)$		0	0	0	

12.9 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)(x - 4)$$

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε, με δύο τρόπους, το πρόσημο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $f(-7)f(-3)f(3)$ είναι θετικός.

12.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

12.11 Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x - \eta \mu x$ **β)** $g(x) = x + \eta \mu x$

12.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 4$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

12.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\ln|x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της:

$$g(x) = \ln|x|, \quad x \neq 0$$

δ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

12.14 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{24 - 2x - x^2} - x$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

12.15 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο $[0, \pi]$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $[0, \pi]$.

12.16 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

β) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi]$

12.17 Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $x^2 + f^2(x) = 4$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

12.18 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f(x)[g(x) + 1] \geq 1$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

12.19 Για μια συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι η C_f δεν τέμνει τις ευθείες:

$$y = x \quad \text{και} \quad y = -2x$$

$$\text{Αν } g(x) = \frac{f(x) - x}{f(x) + 2x} :$$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g ,

β) να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12.20 Να αποδείξετε ότι η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο στο διάστημα A στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|f(x)| = 5, \quad x \in A = \mathbb{R}$

β) $f^2(x) = 4, \quad x \in A = \mathbb{R}$

γ) $f^2(x) = x^2 - 4, \quad x \in A = (-2, 2)$

δ) $f^2(x) - x^2 = 6 - 5x, \quad x \in A = (2, 3)$

12.21 Να βρείτε το πρόσημο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f^2(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 1$

β) $f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(1) = -2$

12.22 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(2007) + f(2006) = 0 \quad \text{και}$$

$$f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

12.23 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2) + f(4) + f(6) = 0$$

α) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

12.24 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(f(0)) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

12.25 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(1) = 2006$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ [f(2) + 1]x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \right\}$

$$\beta) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(4) + 2]x^3 + 1}{x^2 + 2}$$

12.26 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(0) = 5$ και $g(0) = 4$. Οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)(f(x_0) + 1) = \frac{g(x_0)}{x_0}$$

12.27 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της f .

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii) } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

12.28 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1]$.

12.29 Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f^2(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) > 2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως φθίνουσα,

γ) η εξίσωση $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (0, 1)$.

2. Εύρεση τύπου συνάρτησης

12.30 Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|f(x)| = 5, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 5$

β) $|f(x) - 1| = 2, x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 3$

12.31 Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f(x) - \sin x)(f(x) + \sin x) = \eta \mu^2 x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

δ) Να βρείτε τον τύπο της f .

12.32 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f^2(x) = 9, x \in \mathbb{R}$

β) $f^2(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R}$

γ) $(f(x) - e^x)^2 = 4, x \in \mathbb{R}$

δ) $f^2(x) + e^x(e^x - 2f(x)) = x^2(x^2 + 2) + 1, x \in \mathbb{R}$

12.33 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με:

$$(f(x) - x^2)(f(x) + x^2) = 2x^2 + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

β) Να βρείτε τον τύπο της f , αν:

$$f(2000) = 4 \cdot 10^6 + 1$$

12.34 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x) - 2f(x) \cdot \eta \mu x = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

12.35 Έστω η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 6x - x^2 - 5, \quad x \in [1, 5]$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(1, 5)$.

γ) Αν $f(2) = 3$, να βρείτε τον τύπο της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

12.36 Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f(x) - e^x)(f(x) + e^x) = 1 - 2e^x \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

12.37 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στις παρακάτω περιπτώσεις και να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

α) $f^2(x) = x^6, x \in \mathbb{R}$

β) $f^2(x) = \ln^2 x, x \in (0, +\infty)$

12.38 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 4x = x^2 + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

12.39 Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \text{ και}$$

$$(f(x) + x^2)(f(x) - x^2) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

12.40 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x) - 1 = 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x$$

διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(0) = 1$, τότε:

i) να βρείτε τον τύπο της f ,

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x))$$

12.41 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

με την ιδιότητα $f(1)f(3)f(9) = 27$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) υπάρχει $\xi \in [1, 9]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3$,

γ) η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.