

με την ιδιότητα:

$$(f(x) - 2)(f(x) - 3) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

13.19 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f^2(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $f^2(x) + 6 = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f^3(x) + 5f(x) = 4f^2(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $f^2(x)(f(x) - 4) + 4 - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

13.20 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ με $f(2004) = 2013$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

13.21 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(2) = 6$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 12$ για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(6) = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 6)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4$.

γ) Να υπολογίσετε τα $f(4)$ και $f(5)$.

δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε τον τύπο της f .

13.22 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$ με:

$$f(1)f(2)f(4) = 8 \text{ και}$$

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$,

β) η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$,

γ) η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

13.23 α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι " $1 - 1$ ". Αν η f είναι και συνεχής, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2. Θεώρημα ελάχιστης - μέγιστης τιμής

13.24 Δίνεται η συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [0, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{2f(1) + 3f(2)}{5}$.

β) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in [0, 3]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2) = \sqrt{f(1)f(2)}$$

13.25 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2 \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$

τέτοιος, ώστε $2f(x_1) + 3f(x_2) = 5f(\xi)$.

13.26 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, b]$, ώστε $6f(\gamma) = f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)$.

13.27 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$. Αν κ, λ, ρ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2) + \rho f(x_3)}{\kappa + \lambda + \rho}$$

3. Εύρεση συνόλου τιμών

13.28 Έστω $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με:

$$f(0) = 1 \text{ και } f(3) = 4$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε την εικόνα του $[0, 3]$ μέσω της f .

13.29 Έστω $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με:

$$f(-1) = -2 \text{ και } f(4) = -5$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το $f([-1, 4])$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό:

$$x_0 \in (-1, 4)$$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -3$.

13.30 Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 3, x \in [-1, 1]$

β) $g(x) = \frac{x}{x^2 - 9}, x \in (-3, 3)$

γ) $h(x) = \sin^3 x - \eta \mu^3 x - 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

δ) $\varphi(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

13.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 2$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii) $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + \ln x = 2$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

13.32 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \ln x + x - 1$$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία μόνο ρίζα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

13.33 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } f(1) = -2$$

να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

13.34 Να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις έχουν ακριβώς μια θετική ρίζα x_0 :

α) $\ln(e^x - 1) = 2 - x$

β) $\ln(x - 1) + e^x = 3 - x$

13.35 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

x	$-\infty$	-5	1	6	$+\infty$
f(x)					

Δίνεται ακόμη ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(-5) = 5, f(1) = -1,$$

$$f(6) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Να βρείτε:

α) τις εικόνες των διαστημάτων:

$$\Delta_1 = (-\infty, -5], \Delta_2 = [-5, 1],$$

$$\Delta_3 = [1, 6] \text{ και } \Delta_4 = [6, +\infty)$$

μέσω της συνάρτησης f ,

β) το σύνολο τιμών της f ,

γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$,

δ) το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 6]$.

13.36 Έστω $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της f .

x	-5	-3	1	4	5
f(x)					

Ακόμη ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty, f(-3) = 2, f(1) = -1,$$

$$f(4) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$$

Να βρείτε:

α) τις εικόνες των διαστημάτων:

$$\Delta_1 = (-5, -3], \Delta_2 = [-3, 1],$$

$$\Delta_3 = [1, 4] \text{ και } \Delta_4 = [4, 5)$$

μέσω της συνάρτησης f ,

β) το σύνολο τιμών της f ,

- γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$,
 δ) το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα $[-3, 1]$,
 ε) τη μέγιστη τιμή της f .

13.37 Δίνεται η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

πεπερασμένα ή άπειρα. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{\eta \mu x + x}$

δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) + x^2}{x + 1}$

4. Συνδυαστικά θέματα

13.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι " $1 - 1$ ".
 β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
 γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = 0 \quad \text{και} \quad f^{-1}(x + 1) = x$$

- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < e$.
 ε) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:
- $$f(x) = 2015$$

13.39 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

με την ιδιότητα $f \circ g = g \circ f$. Αν η εξίσωση:

$$(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύση.

13.40 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

Αν η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει επίσης μία πραγματική ρίζα.

13.41 Μια συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [1, 5]$. Αν $f(3) = 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- α) $f(1) > 0$ και $f(5) < 0$,
 β) η εξίσωση $f(2x + 3) = x$ έχει μοναδική ρίζα.

13.42 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις με $g \circ f = f \circ g$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις,
 β) η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα,
 γ) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε:
- $$f(x_0) = g(x_0) = x_0$$

13.43 Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{2}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = \frac{1}{2}$ ii) $f\left(\frac{3}{x}\right) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(xy) = 2f(x)f(y)$ και

$$f^2(x) = \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

13.44 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 4)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 6f(\xi)$$

13.45 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και ισχύει:

$$f(f(f(x))) = -x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

- α) η f είναι γνησίως φθίνουσα,
 β) η f είναι περιττή,
 γ) $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Προβλήματα

13.46 Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες, ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ να υπάρχει $y \in [a, b]$, με $f(x) = g(y)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, b]$, ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

13.47 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται το τετράγωνο OABΓ όπου O η αρχή των αξόνων και $A(1, 0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων OB, AG.

β) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τις διαγώνιες OB, AG τουλάχιστον σε ένα σημείο.

13.48 Μια βιομηχανία κατασκευής μηχανών έχει καθορίσει την τιμή πώλησης κάθε μηχανής ως εξής: Αν ημερησίως παράγονται μέχρι 10 μηχανές, τότε η τιμή του καθενός θα είναι 5 χιλιάδες €, ενώ για κάθε επιπλέον μηχανή η τιμή θα μειώνεται κατά 100 €.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f που δίνει την τιμή πώλησης (σε χιλιάδες €) της κάθε μηχανής ως συνάρτηση του αριθμού των παραγόμενων μηχανών.

β) Να εξετάσετε αν η παραπάνω συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τα έσοδα (σε χιλιάδες €) της βιομηχανίας και να εξετάσετε αν αυτή είναι συνεχής.

13.49 Έστω M τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in [1, 2]$ και A, B οι προβολές του σημείου M στους ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα.

α) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του ορθογωνίου OAMB, ως συνάρτηση του x .

β) Να βρείτε το εμβαδόν E_2 του τετραγώνου με πλευρά την OM, ως συνάρτηση του x .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο M της γραφικής παράστασης της f , για το οποίο ισχύει $E_1^2 = E_2$.

13.50 Ένας ορειβάτης ξεκίνησε μια μέρα στις 7 π.μ. από τους πρόποδες του Ολύμπου και έφτασε στην κορυφή του στις 3 μ.μ. Την άλλη ημέρα ξεκίνησε στις 7 π.μ. και ακολουθώντας την ίδια διαδρομή επέστρεψε μετά από 8 ώρες στο σημείο απ' όπου είχε ξεκινήσει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίο ο ορειβάτης βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

13.51 Ένας δρομέας διανύει μια απόσταση 6 km σε 30 λεπτά. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τμήμα AB της διαδρομής, μήκους 1 km, το οποίο ο δρομέας διανύει ακριβώς σε 5 λεπτά.

13.52 Σε μια ηπειρωτική πόλη της Ελλάδας διαπιστώθηκε ότι η θερμοκρασία στις 12 η ώρα τα μεσάνυχτα ήταν 0°C , ενώ στις 12 το μεσημέρι ήταν 24°C . Να αποδείξετε ότι υπάρχει κάποιο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα, διάρκειας μίας ώρας, στο οποίο η θερμοκρασία ανέβηκε ακριβώς κατά δύο βαθμούς.

13.53 Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία του ισημερινού της Γης, τα οποία έχουν την ίδια θερμοκρασία.

Η κατανόηση της θεωρίας

13.54 Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και πότε συνεχής;

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τη

συνέχεια και τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

γ) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο (a, b) και πότε στο $[a, b]$; **(Θέμα εξετάσεων)**

δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ε) Πώς βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f ;

στ) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. (Εξετάσεις 2005)

ζ) Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

η) Πώς βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f σε ένα διάστημα $\Delta = (a, b)$;

13.55 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Η f λέγεται συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν ή ισοδύναμα
.....

β) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι στο

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν σε αυτό, τότε η f διατηρεί
..... στο Δ , δηλαδή αυτή ή είναι
για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι για κάθε $x \in \Delta$.

δ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ζ είναι ένας αριθμός μεταξύ των $f(a)$, $f(b)$, τότε
..... ένα τουλάχιστον τέτοιο, ώστε

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας και μη σταθερής συνάρτησης f είναι

στ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ τιμή m και τιμή M , δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in \dots$, με $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, ώστε να ισχύει για κάθε $x \in [a, b]$. Το σύνολο τιμών της f είναι τότε το

ζ) Αν η f είναι και
..... σε ένα διάστημα $\Delta = (a, b)$, $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, τότε

το σύνολο τιμών της f στο διάστημα αυτό είναι το
..... αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή το
..... αν η f είναι
.....

η) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε η εξίσωση έχει μία
..... ρίζα στο διάστημα

13.56 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

β) Αν η $f + g$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και οι f , g είναι συνεχείς στο x_0 .

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε:
 $f(a)f(b) < 0$

(Θέμα εξετάσεων)

δ) Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και η f παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . (Εξετάσεις 2005)

στ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που χωρίζουν ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της δύο διαδοχικές ρίζες της.

ζ) Αν η f είναι συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση στο A , τότε το $f(A)$ είναι διάστημα.

η) Αν η f είναι συνεχής στο:

$$\Delta = (a, b), \quad A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ είναι το (A, B) ή το (B, A) .

θ) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) , τότε η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

ι) Αν η f είναι συνεχής στο $\Delta = (a, b)$ και:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$$

τότε $f(\Delta) = \mathbb{R}$.

ια) Αν η f είναι συνεχής στο σύνολο A και:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

τότε η f διατηρεί πρόσημο στο A .

(Θέμα εξετάσεων)

ιβ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, b]$ και συνεχής στο $(a, b]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, b]$ μία μέγιστη τιμή. (Θέμα εξετάσεων)

ιγ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(b) > 0$. (Εξετάσεις 2005)

ιδ) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και τα:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

είναι ετερόσημα (πεπερασμένα ή άπειρα), τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) . Αν επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, b) , τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ιε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. (Εξετάσεις 2006)

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ13.1 Έστω η συνεχής συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} + f(x) = \ln x + x \text{ για κάθε } x > 0$$

Δίνεται ακόμη η συνάρτηση:

$$g(x) = x + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης g^{-1} .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \quad A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(1 + 2^x) - f(1 + 3^x))$$

$$\text{ii)} \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f(1 + e^x))$$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$g(2^x) + g(4^x) < g(3^x) + g(5^x)$$

Θ13.2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln x, \quad x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(e^{x+1}) - x - \lambda^x - 1}{e^x + \lambda^{x+1}}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda > 0$.

Θ13.3 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

♦ το σημείο $A(0, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f ,

$$\text{♦} \quad f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4 \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$$B(2, -2) \text{ και } \Gamma(-2, -2)$$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα:

$$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Θ13.4 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα:

$$(-\infty, 0) \text{ και } (0, +\infty)$$

β) Αν $f(-2) > 0 > f(2)$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$, $x \in \mathbb{R}$,
- ii) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} ,
- iii) να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$,
- iv) να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{f(x) \eta \mu \frac{\pi}{x}}{x^2 + 1}}$$

Θ13.5 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει:

$$x^2 < f(x) < x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = 2x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

i) η $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα,

ii) η εξίσωση $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 2)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \right]$$

Θ13.6 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- ♦ $f^2(x) + \eta \mu^2 x = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\ell = 1$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i) A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x^2 + x}$$

$$ii) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(4x) - f(-x)\eta \mu 3x}{2x^2 - \eta \mu^2 x}$$

γ) Αν $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta \mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + \sqrt{x^2 + \sigma \nu \nu^2 x}}$$

Θ13.7 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 7x - 5$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' σε ένα και μόνο σημείο $M(x_0, 0)$ με $x_0 \in (0, 1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 2014$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i) A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^4}$$

$$ii) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

Θ13.8 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

- ♦ $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)
- ♦ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
- ♦ $f(1) = e$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(-1) = \frac{1}{e}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν υπάρχουν τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

να τα υπολογίσετε.

ε) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να βρείτε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x)}{f(x)}$

με την προϋπόθεση ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

ζ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right]$$

η) Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\alpha\beta)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

Θ13.9 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{\eta \mu x}$.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

A1. α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$ και πότε συνεχής;

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

A2. Δίνονται οι προτάσεις:

i) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (a, b)$.

ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$.

iii) Η f έχει σύνολο τιμών στο διάστημα Δ το (A, B) .

iv) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

α) Να διατάξετε τις παραπάνω προτάσεις με τέτοιο τρόπο, ώστε η τελευταία να προκύπτει από τις υπόλοιπες τρεις.

β) Ποια πρόταση θα αλλάξετε ακόμα στη διάταξη του ερωτήματος (α), αν η πρόταση (iv) γίνει: «Η f είναι γνησίως φθίνουσα»;

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$, με $f(a) \neq f(b)$ και η ένας αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$ και αντίστροφα.

β) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \neq 0$, τότε $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = f(x_0)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f .

δ) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$, τότε για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, πρέπει και αρκεί να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και να είναι ίσα.

ε) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

στ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

η) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0$.

θ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, τότε η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

ι) Αν μια συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο x ενός διαστήματος Δ , τότε η συνάρτηση αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

ια) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, τότε $f(\Delta) = (B, A)$.

ιβ) Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

ιγ) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο (α, β) , τότε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

ιδ) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f(\Delta) = (A, B)$, τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = A$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = B$.

Θέμα Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

B1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.

B2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}$.

B3. Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta \mu 2x}{x^2 + \eta \mu x}$.

Θέμα Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$ και:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x} - x^2)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\sqrt{x^4 + x})f(-x^2)] = 1$.

Γ4. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = e$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = e^2$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(3) = e^3$,

β) η C_f και η ευθεία $y = x + 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0, 2)$.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [2, 8] \text{ και } f(2)f(4)f(8) = 64$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, 8]$,

Δ2. υπάρχει $x_1 \in (2, 8)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 4$,

Δ3. υπάρχει $x_2 \in [2, 8]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = x_2$.

1η επανάληψη

A. Θέματα από τις συναρτήσεις και τα όρια

E1.1 Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) = x + 5 - 2f(7)$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(2007) = 2004$.
- β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$.
- γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η C_g στο σημείο $A(3, f(3))$.

E1.2 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

με την ιδιότητα:

$$f(xy) + f(x) + f(y) = xy + x + y$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

E1.3 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

- α) $f(xy) + x + y = xy + f(x) + f(y)$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
- β) $g(xy) + g(x) + g(y) = xy + x + y + 3$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

E1.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x) + x$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln(x-1) - \ln(3-x) + x = 2$$

E1.5 Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) = x^2 - 2f(2)x - 3f(4)$$

- α) Να αποδείξετε ότι $5f(2) + 3f(4) = 4$.
- β) Να βρείτε το $f(3)$.
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x)$.

E1.6 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(g \circ f)(x) = x + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2 - 7x + 6) = f(x - 1)$$

E1.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+3} - 1$.

- α) Να εξετάσετε αν η f είναι "1-1".
- β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} .
- γ) Να ορίσετε την f^{-1} , εφόσον αυτή ορίζεται.

E1.8 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f \circ f)(x) - (f \circ f)(x) = x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε το $f(0)$.

E1.9 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως φθίνουσες.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - i) η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα,
 - ii) οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσες.
- β) Έστω ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_1 = 2$.

- i) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(3-x) = -f(4-2x)$$

- ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(3-e^x) + f(4-2e^x) > 0$$

E1.10 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = 2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1". Ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} ;

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + x) = f(2x + 2)$.

E1.11 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + (x - 2)^2 \text{ με } x \geq 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και $C_{f^{-1}}$. Αν το χωρίο που σχηματίζει η C_f με την ευθεία $y = x$ έχει εμβαδόν $\frac{1}{6}$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τη $C_{f^{-1}}$.

E1.12 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x} - x - 2}{x - 1}$

β) $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x + 1| - 2x}{x^2 - 4}$

E1.13 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2$, να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 1}$

β) $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - x}{x - 1}$

E1.14 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2} = 5$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha \sqrt{x} + x^2 + \beta}{x^2 - 1} = 3$

E1.15 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sigma \nu \nu \frac{2}{x} \right)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta \mu^2 x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu \frac{1}{x} \right)$

E1.16 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$x^2 - x^4 \leq x f(x) \leq x^2 + x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x}$

δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^3}{\eta \mu x}$

E1.17 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

β) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 + x}$

γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 - x}$

δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sigma \nu \nu x)}{\sigma \nu \nu x}$

ε) $E = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sigma \nu \nu x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

στ) $Z = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x - 1)}{x^2 - 1}$

E1.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 3}$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \eta \mu x]$

E1.19 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

β) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \eta \mu \frac{2}{x} \right)$

E1.20 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu^2 x}{x^4}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{x^2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu^3 x}{x^4}$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{3}{x} \right)$

ζ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \eta \mu x)$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sigma \nu \nu x)$

B. Θέματα στη συνέχεια

E1.21 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $xf(x) \leq \eta\mu 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f(0)$.

E1.22 Για μια συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 0$.

β) Να βρείτε το $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

E1.23 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^2(x) + 2x \leq 2xf(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

E1.24 Έστω η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [1, 2] \rightarrow (0, 1)$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x) + x = 1 + xf(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

E1.25 Έστω f συνεχής στο $[1, 4]$ με:

$$f(1) + f(2) = f(3) + f(4), \quad f(1) \neq f(2)$$

$$\text{και } f(3) \neq f(4)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$$

β) η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

E1.26 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο $[0, 1]$ με:

$$f(0) = g(1), \quad f(1) = g(0) \quad \text{και} \quad f(0) \neq f(1)$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

β) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω συμπεράσματος;

E1.27 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(1) = 3$ και $f(3) = 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4$.

E1.28 Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$6f(\xi) = f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

E1.29 Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$ και $\kappa, \lambda, \mu \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(\kappa) + 5f(\lambda) + 7f(\mu) = 15f(\xi)$$

E1.30 Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 2e^x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - e^x$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

E1.31 Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^2(x) = 1 + 2e^x(1 - f(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $f(2008) < 0$, να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

E1.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να βρείτε τα όρια:

$$M = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{και} \quad N = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

E1.33 Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \eta\mu x + \epsilon\phi x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\beta) f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [1, 3]$$

$$\gamma) f(x) = 2x^2 - 4x, \quad x \in [1, 3]$$

$$\delta) f(x) = \sin x - x^2, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$