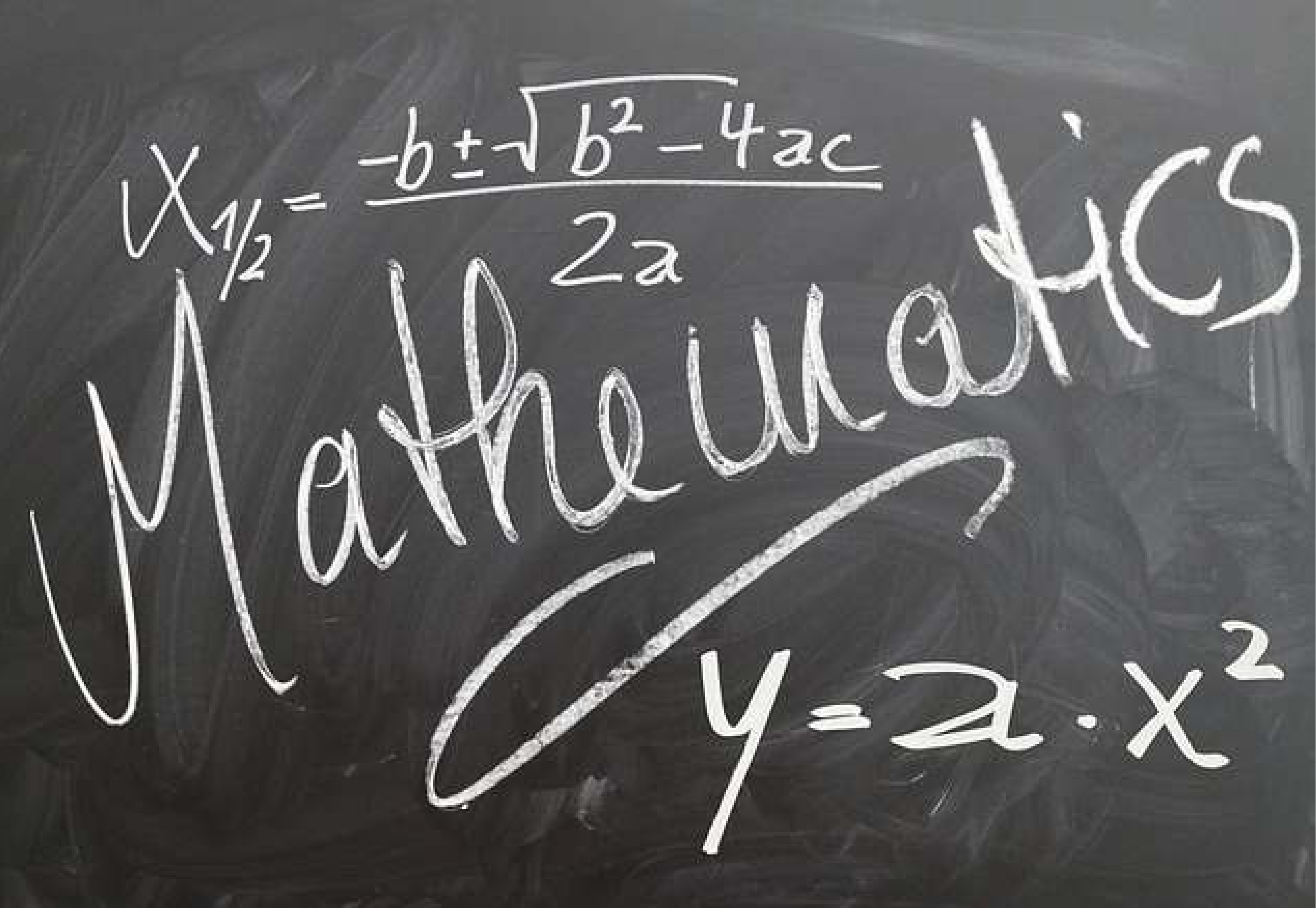

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Έννοια της παραγώγου - Υπολογισμός παραγώγου

14.16 Να βρείτε την παράγωγο της f στο x_0, όταν:

α) $f(x) = x^2 + 3,\ x_0 = 1$

β) $f(x) = \frac{2}{x},\ x_0 = -1$

γ) $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ x_0 = 2$

δ) $f(x) = 4\sqrt{x+1},\ x_0 = 3$

ε) $f(x) = x^3 + 2x + 5,\ x_0 = 2$

στ) $f(x) = x^2 + 4 + \sqrt{x^2+3},\ x_0 = 1$

14.17 Να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο x_0, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(3+h) = 2 + 3h + h^4$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 3$

β) $f(1+h)=1+h^2+\eta\mu 2h$ για κάθε $h\in\mathbb{R}$ και $x_0=1$

14.18 Να βρείτε το $f'(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x,\ x_0=0$

β) $f(x)=(x^2-1)|x-1|,\ x_0=1$

γ) $f(x)=3x^2+x\sqrt{x+1}+\sigma\upsilon\nu 2x,\ x_0=0$

14.19 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x^3+x-3, & \alpha\nu\ x\le -1 \\ x^2+6x, & \alpha\nu\ x>-1 \end{cases}$

β) $g(x)=\begin{cases} x^2+9x-3, & \alpha\nu\ x<-1 \\ x^3+4x-6, & \alpha\nu\ x\ge -1 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=-1$.

14.20 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όπου:

α) $f(x)=|x-1|+1,\ x_0=1$

β) $f(x)=|x^2-4|+x-2,\ x_0=2$

14.21 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x e^{\frac{1}{x}}+1, & \alpha\nu\ x<0 \\ \sigma\upsilon\nu 2x, & \alpha\nu\ x\ge 0 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\ne 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases} x^4\cdot\eta\mu^\nu\frac{x}{2}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \sqrt{x}\cdot\eta\mu 5x, & \alpha\nu\ x\ge 0 \end{cases},\ \nu>1$

δ) $f(x)=\begin{cases} x^3 e^{\frac{1}{x}}, & \alpha\nu\ x<0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \\ x^2 e^{-\frac{1}{x}}\cdot\sigma\upsilon\nu^\nu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$

14.22 Να βρείτε την παράγωγο της f στο x_0, όταν:

α) $x\le f(x)-1\le x^2+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=0$

β) $2x+3\le f(x)\le x^2+2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=0$

γ) $2x-x^2\le f(x)\le x^2-2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=1$

δ) $\eta\mu 2x-x^2\le f(x)\le \eta\mu 2x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=0$

ε) $5\eta\mu^2 x-3x^4\le xf(x)\le 5\eta\mu^2 x+3x^4,\ x_0=0$ και f συνεχής στο 0

στ) $|xf(x)-\eta\mu^2 x|\le x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=0$, $f(0)=0$

2. Παράγωγος και συνέχεια - Εξίσωση εφαπτομένης

14.23 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν:

α) $f(x)=x^2+x-2,\ x_0=1$

β) $f(x)=x^3+x^2-2x+3,\ x_0=-1$

γ) $f(x)=2\sqrt{x+2},\ x_0=-1$

δ) $f(x)=2-x+x\cdot\eta\mu|x|,\ x_0=0$

14.24 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-6, & \alpha\nu\ x<1 \\ -\frac{4}{x}, & \alpha\nu\ x\ge 1 \end{cases},\ x_0=1$

β) $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & \alpha\nu\ x\le 1 \\ 4x-x^2, & \alpha\nu\ x>1 \end{cases},\ x_0=1$

14.25 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ όταν:

$2x^2-x+2\le f(x)\le 3x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

3. Εύρεση παραμέτρων

14.26 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha x+1, & \alpha\nu\ x\le 0 \\ x^2+x+\alpha^2, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases},$

$x_0=0$

β) $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha x+2, & \alpha\nu\ \ x<1 \\ \beta\sqrt{x}, & \alpha\nu\ \ x\ge 1 \end{cases}$, $x_0=1$

14.27 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & \alpha\nu\ \ x<2 \\ 3, & \alpha\nu\ \ x=2 \\ \gamma x^2+x-3, & \alpha\nu\ \ x>2 \end{cases}$, $x_0=2$

β) $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+2\beta\sqrt{x+3}+6, & \alpha\nu\ \ x<1 \\ x^2+(\alpha+\beta)x-1, & \alpha\nu\ \ x\ge 1 \end{cases}$,

$x_0=1$

γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+\alpha x-2}{x-1}, & \alpha\nu\ \ x<1 \\ \gamma x^2+\beta x+\alpha, & \alpha\nu\ \ x\ge 1 \end{cases}$,

$x_0=1$

4. Παράγωγος και όρια

14.28 Αν η f είναι συνεχής στο 3 και:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f(3)=0$ β) $f'(3)=5$

14.29 Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=10$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f(2)=0$ β) $f'(2)=10$

14.30 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο α και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\alpha+x)}{x}=3$$

να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)=3$.

14.31 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}=2$$

να αποδείξετε ότι $f'(1)=5$.

14.32 Αν $f^2(x)-2xf(x)=3\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=0$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

14.33 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)-xf^2(x)-x^2f(-x)=x^2\cdot\eta\mu x$$

να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

14.34 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)+1=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=2$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

14.35 Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ και έχει την ιδιότητα:

$$x^2f^3(x)+f(x)+1=x^3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(1)=3$.

5. Θεωρητικές ασκήσεις

14.36 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $f(x_0)=g(x_0)=0$ και $g'(x_0)\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

14.37 Αν για τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)|\le|g(x)| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(0)=g'(0)=0$$

να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

14.38 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και:

$$f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ και έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα x΄x.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο α.

β) Να βρείτε τη γωνία την οποία σχηματίζει η εφαπτομένη της C_g στο Α με τον άξονα x΄x.

(Θέμα εξετάσεων)

14.39 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x_0^2 f(x) - x^2 f(x_0)}{x - x_0} = x_0^2 f'(x_0) - 2x_0 f(x_0)$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x)}{x - x_0} =$

$= g(x_0) f'(x_0) - f(x_0) g'(x_0)$

14.40 Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, να αποδείξετε ότι παραγωγίζεται σε κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

14.41 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

14.42 Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha) = 1 + \alpha$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14.43 Αν $f'(0) = 1$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) \cdot \text{συν}2y + f(y) \cdot \text{συν}2x$$

να αποδείξετε ότι $f'(x) = \text{συν}2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14.44 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x^2), & \text{αν } x \le 1 \\ f(2x - 1), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 2f'(1)$.

14.45 Αν $f(0) = 0$ και:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^2(x) + 4x f(x)}{x^2} = -4$$

να αποδείξετε ότι $f'(0) = -2$.

14.46 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{h}$

β) $B = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\alpha + 2h) - f(\alpha - h^2)}{h - \text{ημ}2h}$

14.47 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2) = 3$, να βρείτε το όριο:

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + 3h) - f(2 - 5h)}{f(2 + 6h) - f(2 - 2h)}$$

14.48 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και ισχύει:

$$f(x + y) \le f(x) + f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = x + f'(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$