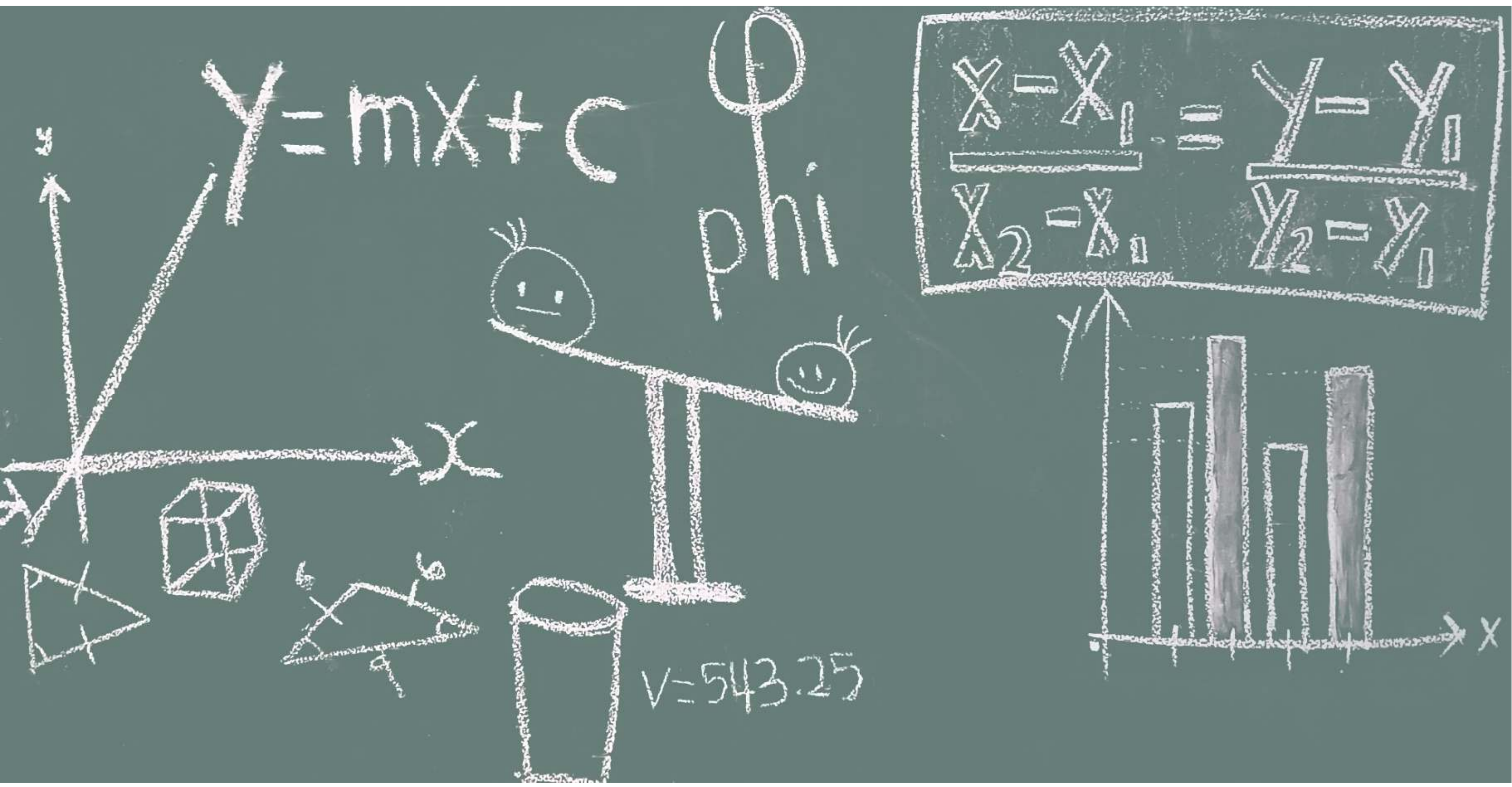


Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

15.13 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν:

α) $f(x) = x^3$, $x_0 = -2$

β) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

γ) $f(x) = ημx$, $x_0 = π$

δ) $f(x) = συνx$, $x_0 = \frac{3π}{2}$

ε) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

στ) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$

15.14 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ \text{συν}x, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$

β) $g(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x\leq 0 \\ x^4, & \text{αν } x>0 \end{cases}$

15.15 Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{αν } x<1 \\ \ln x, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} x^4, & \text{αν } x<0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } 0\leq x<6 \end{cases}$

15.16 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to \ln 2}\dfrac{e^x-2}{x-\ln 2}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\text{συν}x+1}{x-\pi}$

2. Κανόνες παραγώγισης

15.17 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3+\alpha^2+2$

β) $g(\alpha)=\alpha^3+x^2+2$

15.18 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3-2x^2+5x+6$

β) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+2$

γ) $f(x)=2\eta\mu x-3\text{συν}x+\ln 2$

δ) $f(x)=2\sqrt{x}+\ln x-1$

ε) $f(x)=x^{-3}+\text{συν}x-\eta\mu x+\varepsilon\varphi\varphi$

στ) $f(x)=x^{-4}+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$

ζ) $f(x)=e^x+\ln x-\eta\mu x+\text{συν}1$

η) $f(x)=2\varepsilon\varphi x-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

15.19 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=(x+1)\ln x$

β) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x+\text{συν}x)$

γ) $f(x)=(1+\eta\mu x)(1+\text{συν}x)-\eta\mu x-\text{συν}x$

δ) $f(x)=x^2\ln x$

ε) $f(x)=x^3\eta\mu x$

στ) $f(x)=x^3\eta\mu x\cdot\text{συν}x$

ζ) $f(x)=x^2e^x$

η) $f(x)=x^3e^x\ln x$

θ) $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$

15.20 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x-3}$

β) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

δ) $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$

ε) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

στ) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

ζ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{e^x}$

η) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$

15.21 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{4x}-\ln x+1$

γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}$

δ) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

ε) $f(x)=\dfrac{x\cdot\eta\mu x}{x+1}$

στ) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$

ζ) $f(x)=\dfrac{3}{\eta\mu x\cdot\text{συν}x}$

η) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$

θ) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$

ι) $f(x) = x + \frac{\ln x - 1}{x}$

15.22 Να βρείτε τις παραγώγους των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$

β) $f(x) = x^2 ημx \cdot \ln x$

γ) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 + x + x^2}$

3. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

15.23 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

α) $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$ β) $f(x) = ημ3x$

γ) $f(x) = συν^4 x$ δ) $f(x) = συν4x$

ε) $f(x) = \sqrt{x^4 + 5}$ στ) $f(x) = ημ^3 x$

ζ) $f(x) = \ln^3 x$ η) $f(x) = ημ(e^x + x^2)$

15.24 Να βρείτε την παράγωγο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1),\ x > 0$

β) $f(x) = 2\left(\sqrt{x} \cdot ημ\sqrt{x} + συν\sqrt{x}\right),\ x > 0$

γ) $f(x) = συν^5(x^2 + 1)$ δ) $f(x) = \ln^4(x^2 + 4)$

ε) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ στ) $f(x) = e^{συν(2 - x^2)}$

ζ) $f(x) = \sqrt{ημ(συνx)}$ η) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

15.25 Να βρείτε την παράγωγο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = συν(ημx)$ β) $f(x) = εφ(ημx^2)$

γ) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 3}$

δ) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

ε) $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)^3}$ στ) $f(x) = -σφx^2 \cdot εφ^2 x$

ζ) $f(x) = e^{-x}(x + 1)^2$ η) $f(x) = ημ^3 2x$

15.26 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + ημ^2θ$

β) $g(x) = e^{x^2} + ημ^2α$

γ) $h(x) = \ln x - συν^2θ$

δ) $φ(θ) = ημe^x + συν^2θ$

15.27 Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^{2x},\ x > 0$

β) $f(x) = (1 + x)^x,\ x > -1$

γ) $f(x) = x^{e^x},\ x > 0$

δ) $f(x) = (ημx)^{συνx},\ x \in (0, π)$

15.28 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{ημ^3 x},\ x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$

β) $f(x) = \ln x \cdot \ln(2x)$

γ) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

δ) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

ε) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-2} + (x^2 + x + 6)^2$

στ) $f(x) = σφ(ημx)$

ζ) $f(x) = ημ^3(e^{x^2 + 1})$

η) $f(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})$

15.29 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρείτε την g' όταν:

α) $g(x) = f(ημ2x)$

β) $g(x) = f^2(\sqrt{x^2 + 1})$

γ) $g(x) = \ln(1 + f^2(x))$

δ) $g(x) = ημ^3 f(ημx)$

ε) $g(x) = e^{\sqrt{1 + f^4(x)}}$

στ) $g(x) = f(x) \cdot συνf(x)$

ζ) $g(x) = f^3(ημ2x)$

η) $g(x) = e^{f(\sqrt{x^2 + 5})}$

15.30 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^{e^x},\ x>0$

β) $f(x)=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^x,\ x\in(0,\pi)$

γ) $f(x)=(\ln x)^{\ln x},\ x>1$

δ) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}},\ x>0$

ε) $f(x)=x^{x^x},\ x>0$

στ) $f(x)=(\eta\mu x)^{\ln(\eta\mu x)},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

15.31 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$g(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$$

$$h(x)=\ln\frac{x^2}{x+1}+\frac{6}{x+1}$$

$$\varphi(x)=x[\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x)=2\sqrt{x^2+1}$

β) $g'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

γ) $h'(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$

δ) $\varphi'(x)=2\eta\mu(\ln x)$

15.32 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

β) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

γ) $h(x)=\eta\mu^2(3x)+\sigma\upsilon\nu^3(2x)$

δ) $\varphi(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

ε) $\omega(x)=e^{x^2+1}+\ln(x^2+1)$

στ) $\kappa(x)=\ln(\eta\mu x)+\ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Η παράγωγος της $f(x)=x^\alpha$

15.33 Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x^5},\ x\neq0$

β) $f(x)=x^{-6},\ x\neq0$

γ) $f(x)=\sqrt[3]{x^5},\ x>0$

δ) $f(x)=x^{\frac{4}{3}},\ x>0$

ε) $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x^2},\ x>0$

στ) $f(x)=x^{-\frac{5}{4}},\ x>0$

15.34 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\quad\text{και}\quad g(x)=\sqrt[3]{x^4}$$

α) Να βρείτε τις παραγώγους των f, g για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g'(0)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η C_g εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων.

5. Παράγωγος ανώτερης τάξης

15.35 Να υπολογίσετε την $f''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=(3x^2-6)\eta\mu x+x(6-x^2)\sigma\upsilon\nu x$

β) $f(x)=x^2\eta\mu x+2x\,\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x$

γ) $f(x)=(x^2-2x+2)e^x$

δ) $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{4x^2}$

15.36 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$

β) $g''(x)+g'(x)+4g(x)+2\eta\mu 2x=0$

15.37 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f επαληθεύει τη δοσμένη σχέση στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$,

$x^2 f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = 0$

β) $f(x) = x\,συνx$,

$x^2 f''(x) + (x^2 + 2)f(x) = 2xf'(x)$

15.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2\ln\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2},\ x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

β) $f''(x) = -\dfrac{1}{x}f'(x) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

15.39 Να υπολογίσετε την $f''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \ln\left(\dfrac{ημx}{x}\right) - \ln\left(\dfrac{συνx}{x}\right)$

β) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 - ημx}{1 + ημx}}$

γ) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{συνx} + εφx\right)$

δ) $f(x) = \dfrac{x\,α^x \ln α - α^x}{\ln^2 α}$

15.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$.

α) Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $α, β, γ \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$α f(x) + β f'(x) + γ f''(x) = f(x)$$

15.41 Να βρείτε τις τιμές των $α, β, γ \in \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν είναι $f(x) = (x^3 + αx^2 + βx + γ)e^x$ και $f'(x) = x^3 e^x$.

β) Αν είναι $g(x) = \dfrac{x^2 - α}{x - β}$ και $(x - β)^2 g'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις f'', g''.

15.42 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \frac{xe^{x-1}}{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad f'(0) = 0,\ f'(1) = 2$$

α) Να βρείτε τα όρια:

i) $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$ **ii)** $B = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x) - 2}{x - 1}$

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο:

$$M(1, f'(1))$$

15.43 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & αν\ \ x < -1 \\ x - x^2, & αν\ \ x \in [-1, 1] \\ x^2 - 3x + 2, & αν\ \ x > 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f' είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

δ) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f.

15.44 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & αν\ \ x \le 1 \\ 3x^2 + 6x - 8, & αν\ \ x > 1 \end{cases}$

β) $g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3, & αν\ \ x \le 1 \\ x^4 + 5x + 1, & αν\ \ x > 1 \end{cases}$

15.45 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & αν\ \ x \le 1 \\ 3x^2 + 6x - 8, & αν\ \ x > 1 \end{cases}$

β) $g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3, & αν\ \ x < 1 \\ x^4 + 5x + 1, & αν\ \ x \ge 1 \end{cases}$

15.46 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με:

$$f(x) = ημ2x,\quad g(x) = συν3x,\quad h(x) = \ln x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f^{(ν)}(x) = 2^ν ημ\left(ν\dfrac{π}{2} + 2x\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $ν \in \mathbb{N}^*$

β) $g^{(ν)}(x) = 3^ν συν\left(ν\dfrac{π}{2} + 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $ν \in \mathbb{N}^*$

γ) $h^{(ν)}(x) = (-1)^{ν-1}\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (ν - 1)}{x^ν}$, $x > 0$, $ν \in \mathbb{N}^*$

6. Παραγώγιση με δύο μεταβλητές

15.47 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, $f'(0) = 1$ και:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$.

15.48 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) - f(y)$$

να βρείτε το $f'(0)$.

15.49 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - \eta\mu x \cdot \eta\mu y$$
$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x+y) = f'(x)f(y) - \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x,\ x, y \in \mathbb{R}$

β) $f'(x+y) = f(x)f'(y) - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y,\ x, y \in \mathbb{R}$

15.50 Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$$

να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

15.51 Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) = f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y)$$
$$\text{για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(x+y)f'(xy) = 2\big(f(x)+f(y)\big)\big(f'(x)+f'(y)\big)$$

15.52 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

α) Αν $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) + y^2 = f'(y) + x^2$$

β) Αν είναι:

$$f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

να αποδείξετε ότι:

$$x\big(f(x) + xf'(x)\big) = y\big(yf'(y) + f(y)\big)$$

7. Η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης

15.53 Αν η συνάρτηση f είναι "1 − 1" και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'\big(f^{-1}(\alpha)\big) = 0$, να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = \alpha$.

15.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^7 + x^5,\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο:

$$x_0 = 0$$

15.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$.

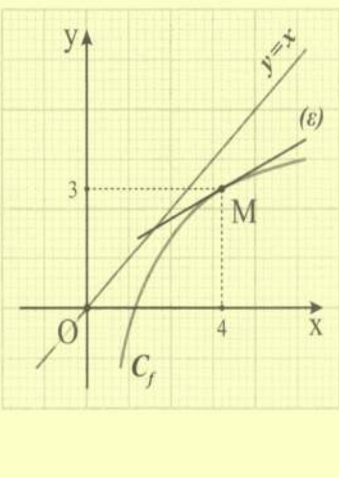
15.56 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο M(4, 3).

Αν $f'(4) = \frac{1}{2}$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε),

β) την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο: N(3, 4)

γ) τον αριθμό: $(f^{-1})'(3)$



15.57 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\eta\mu x,\ \ x\in A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ \ \text{και}$$

$$g(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in B=(0,\pi)$$

Αν δίνεται ότι οι f^{-1}, g^{-1} είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

α) $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ για κάθε $x\in(-1,1)$

β) $(g^{-1})'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ για κάθε $x\in(-1,1)$

8. Θεωρητικές ασκήσεις

15.58 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο, ώστε $f'(x)=f(x)$.

15.59 Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha e^{3x}+\beta e^{2x}+\gamma e^{x}+\delta=0$$

να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

15.60 Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha f(x)-xf(\alpha)}{x-\alpha}=\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)$

β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^{x}f(x)-e^{\alpha}f(\alpha)}{x-\alpha}=e^{\alpha}(f(\alpha)+f'(\alpha))$

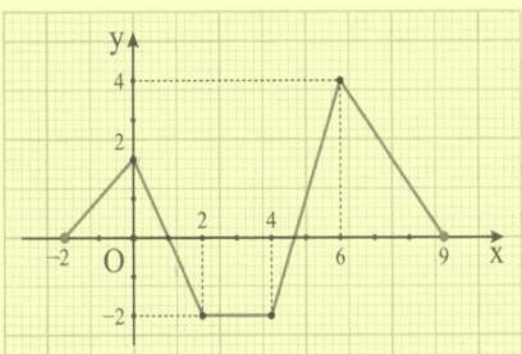
γ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x-\alpha}=$

$=\dfrac{1}{\alpha}f(\alpha)+f'(\alpha)\ln\alpha,\ \ \alpha>0$

δ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\eta\mu\alpha-f(\alpha)\eta\mu x}{x-\alpha}=$

$=f'(\alpha)\eta\mu\alpha-f(\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$

15.61 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-2,9]$.

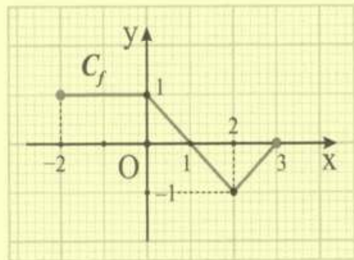


α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1=0$, $x_2=6$.

β) Να βρείτε την $f'(x)$.

γ) Να σχεδιάσετε την $f'(x)$.

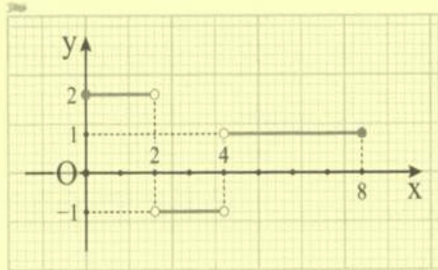
15.62 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



α) Να βρείτε την: $f'(x)$

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f'(x)$.

15.63 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γράψετε τον τύπο της $f'(x)$.

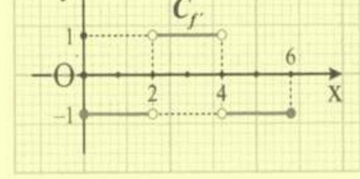
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x$, $x\in[0,2)$.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να γράψετε τον τύπο της.

15.64 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f:[0,6]\to\mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής με $f(0)=0$.



Η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

15.65 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

α) Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι η f' είναι περιττή.

β) Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η f' είναι άρτια.

γ) Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και άρτια, να αποδείξετε ότι $f^{(3)}(0) = 0$.

δ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και άρτια, να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $g(x) = f(x)f'(x)$ είναι άρτια.

ε) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή, τότε $f''(0) = 0$.

15.66 Μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει την ιδιότητα:

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = -\frac{1}{e^x}(x^2 - 3x + 2),\ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον βαθμό της f, **β)** τη συνάρτηση f.

15.67 **α)** Να αποδείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα των $f(x)$ και $f'(x)$.

β) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 8$$

να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

15.68 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu$$

το οποίο έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha}{f'(\alpha)} + \dfrac{\beta}{f'(\beta)} + \dfrac{\gamma}{f'(\gamma)} = 0$

β) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-\alpha} + \dfrac{1}{x-\beta} + \dfrac{1}{x-\gamma}$, $x \neq \alpha,\ x \neq \beta,\ x \neq \gamma$

γ) $(f'(x))^2 > f(x)f''(x),\ \ x \neq \alpha,\ x \neq \beta,\ x \neq \gamma$

δ) $f'(0) = -\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)$

Η κατανόηση της θεωρίας

15.69 **Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:**

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in D_f$; *(Θέμα εξετάσεων)*

β) Ποιοι τύποι δίνουν την παράγωγο της f στο x_0;

γ) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε πρόταση που αφορά την ύπαρξη παραγώγου της f στο x_0 και τη συνέχεια της f στο x_0. *(Θέμα εξετάσεων)*

δ) Τι εκφράζει γεωμετρικά ο αριθμός $f'(x_0)$;

ε) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. *(Θέμα εξετάσεων)*

στ) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο (α, β) και πότε στο $[\alpha, \beta]$;

ζ) Να γράψετε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων:

$c,\ x,\ x^\nu,\ \sqrt{x},\ ημx,\ συνx,\ εφx,\ σφx,\ e^x,\ \ln x$

η) Να γράψετε τους τύπους που δίνουν την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$f+g,\ \ f\cdot g,\ \ \frac{f}{g},\ \ cf$$

όπου f και g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$.

15.70 **Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:**

α) Η παράγωγος της f στο x_0 δίνεται από τους τύπους:

$f'(x_0) =$ .... ή

$f'(x_0) =$ ....

β) Αν η f είναι .... στο x_0, τότε είναι και .... στο x_0. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι:

....

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in$.............. και .... και ....

ε) Ισχύει ότι:

- $(\sqrt{x})' =$ .... , x ......
- $(\eta\mu x)' =$ ....
- $(\sigma\upsilon\nu x)' =$ ....
- $(e^x)' =$ ......
- $(\ln x)' =$ ......
- $(\varepsilon\varphi x)' =$ ....
- $(x^\nu)' =$ ...., $\nu \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$
- $(\sigma\varphi x)' =$ ....

στ) Ισχύει ότι:

- $(f(x)g(x))' =$ ....
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$ ....

ζ) Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, y_0)$ όταν συγχρόνως ισχύουν .... και ....

15.71 Να αποδείξετε τις επόμενες προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

(Θέμα εξετάσεων)

β) Αν $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, τότε:

$$f'(x) = \nu x^{\nu - 1}$$

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

δ) Ισχύει ότι:

i) $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa - 1}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$

ii) $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

ε) Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

(Θέμα εξετάσεων)

στ) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g'(x) = -\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(Θέμα εξετάσεων)

15.72 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f παραγωγίζεται στο x_0.

γ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Η κλίση της f στο x_0 είναι $f'(x_0)$, αρκεί να παραγωγίζεται στο x_0.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ έχει παράγωγο για κάθε $x \geq 0$.

στ) Ισχύει ότι:

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad \text{και} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \; x > 0$$

ζ) Αν η $f + g$ παραγωγίζεται στο x_0, τότε:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

η) Ισχύει ότι:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

όπου $g(x) \neq 0$ και οι f, g παραγωγίζονται στο διάστημα Δ.

θ) Αν οι f, g παραγωγίζονται στο x_0, τότε:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$$

(Θέμα εξετάσεων)

ι) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0. *(Θέμα εξετάσεων)*

ια) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. *(Θέμα εξετάσεων)*

ιβ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. *(Θέμα εξετάσεων)*

15.73 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

β) Αν $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ και $x > 0$, τότε:

$$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

γ) Ισχύει ότι:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

για κάθε x διάφορο του μηδενός.

(Θέμα εξετάσεων)

δ) Αν $\alpha > 0$, τότε $(\alpha^{x})' = x\,\alpha^{x-1}\ln\alpha$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$(f^{\nu}(x))' = \nu f^{\nu-1}(x)\,f'(x) \quad \text{και}$$

$$(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} f'(x)\ln\alpha$$

στ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{και}$$

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

ζ) Αν ισχύει:

$$f'(\alpha) = g'(\alpha) \quad \text{και} \quad f(\alpha) = g(\alpha)$$

τότε οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη α.