



### 1. Προβλήματα από τη Γεωμετρία

**17.8** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με  $36 \text{ m}^2$ .

**17.9** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας ως προς την ακτίνα της τη χρονική στιγμή που αυτή είναι  $\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ .

**17.10** Το ύψος  $x$  της στάθμης του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης  $2 \text{ cm}$  ανεβαίνει με ρυθμό  $\frac{2}{\pi} \text{ cm/s}$ .

**α)** Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο  $V$  του νερού με το ύψος της στάθμης του  $x$ .

**β)** Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού.

**17.11** Σε ένα ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  η πλευρά  $AB$  αυξάνεται με ρυθμό  $2 \text{ cm/s}$ , ενώ η πλευρά  $B\Gamma$  ελαττώνεται με ρυθμό  $3 \text{ cm/s}$ . Να βρείτε:

**α)** τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,

**β)** τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν  $AB = 10 \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 6 \text{ cm}$ .

**17.12** Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  με σταθερή βάση  $B\Gamma = 16 \text{ cm}$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $5 \text{ cm/s}$ . Αν τη χρονική στιγμή  $t_0$  το σημείο  $A$  απέχει από την πλευρά  $B\Gamma$   $6 \text{ cm}$ , να βρείτε:

**α)** τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών,

**β)** τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**17.13** Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό  $16 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Να βρείτε:

**α)** τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου τη χρονική στιγμή που αυτή είναι  $5 \text{ cm}$ ,

**β)** τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι  $5 \text{ cm}$ .

**17.14** Αν σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό  $3 \text{ cm/s}$ , να βρείτε:

**α)** με τι ρυθμό μεταβάλλεται η πλευρά του τριγώνου,

**β)** με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου όταν αυτό είναι ίσο με  $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

**17.15** Το μήκος ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό  $3 \text{ cm/s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το εμβαδόν του κύκλου είναι  $100\pi \text{ cm}^2$ , να βρείτε:

**α)** την ακτίνα του κύκλου,

**β)** τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου,

**γ)** τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου.

**17.16** Η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό  $8 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι  $5 \text{ cm}$ .

**17.17** Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό  $32\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ . Να βρείτε:

α) την ακτίνα του μπαλονιού τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η επιφάνειά του είναι  $16\pi \text{ cm}^2$ ,

β) τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ακτίνα του τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η επιφάνεια της σφαίρας είναι  $16\pi \text{ cm}^2$ .

## 2. Προβλήματα κίνησης

**17.18** Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση πάνω σ' έναν άξονα  $x'x$ . Η θέση  $x(t)$  του κινητού δίνεται από τον τύπο  $x(t) = t^2 - 6t + 5$ , όπου  $t$  είναι ο χρόνος σε  $s$  με  $t \in [0, 10]$ .

α) Σε ποια θέση του άξονα βρίσκεται το κινητό στην αρχή της κίνησής του;

β) Πόση είναι η ταχύτητα του κινητού μετά από  $4 \text{ s}$ ;

γ) Ποια είναι η επιτάχυνση του κινητού κάθε χρονική στιγμή  $t$ ;

δ) Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;

ε) Πόσο είναι το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό στα πρώτα  $10$  δευτερόλεπτα;

**17.19** Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$$

όπου  $t \geq 0$  ο χρόνος σε  $s$ .

α) Σε ποια θέση βρίσκεται το κινητό πριν αρχίσει να κινείται;

β) Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ s}$ ;

γ) Να βρείτε τη (στιγμιαία) ταχύτητα την κάθε χρονική στιγμή  $t$ .

δ) Ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα είναι ίση με μηδέν;

ε) Να βρείτε ποιο χρονικό διάστημα το σώμα κινείται προς τα αριστερά.

στ) Ποια είναι η μεγαλύτερη απομάκρυνση του κινητού προς τα αριστερά;

ζ) Ποια είναι η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ s}$ ;

**17.20** Σε έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη πλάγια μια σκάλα μήκους  $5 \text{ m}$ . Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό

$1 \text{ m/s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο  $3 \text{ m}$ , να βρείτε:

α) σε τι ύψος είναι στερεωμένη η σκάλα,

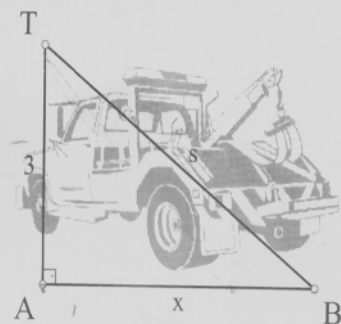
β) με τι ρυθμό πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας,

γ) με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο και το έδαφος,

δ) με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο.

**17.21** Από ένα διαστημικό κέντρο  $K$  παρακολουθείται η κατακόρυφη εκτόξευση ενός πυραύλου. Η βάση εκτόξευσης βρίσκεται  $3 \text{ km}$  από το κέντρο παρακολούθησης. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζουν ο πύραυλος, το κέντρο και η βάση εκτόξευσης, τη στιγμή που ο πύραυλος έχει διανύσει  $6 \text{ km}$  και η ταχύτητά του είναι  $45 \text{ km/s}$ .

**17.22** Ένας γερανός (A) έλκει οριζόντια ένα βαρύ αντικείμενο (B) που βρίσκεται στο έδαφος με ένα συρματόσχοινο. Η τροχαλία (T) βρίσκεται σε ύψος  $3 \text{ m}$  από το

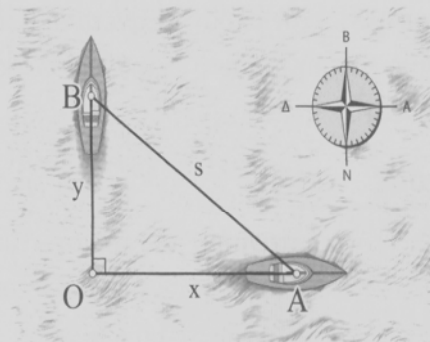


έδαφος πάνω από τον γερανό. Αν το συρματόσχοινο διέρχεται από την τροχαλία με ρυθμό  $20 \text{ m/min}$ , να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο το σώμα πλησιάζει τον γερανό όταν αυτό απέχει  $4 \text{ m}$ .

**17.23** Δύο πλοία A και B, που κινούνται το ένα ανατολικά και το άλλο βόρεια με ταχύτητες:

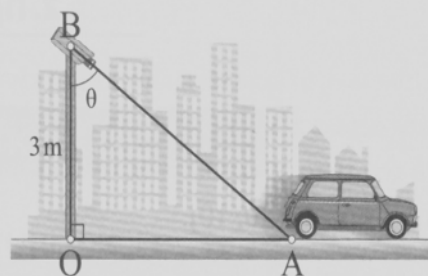
$$v_A = 12 \text{ km/h} \text{ και } v_B = 18 \text{ km/h}$$

αντίστοιχα, διήλθαν από έναν φάρο στη  $1 \mu.\mu.$  και στις  $2 \mu.\mu.$  αντίστοιχα. Να βρείτε:



- α) την απόσταση των δύο πλοίων στις 3 μ.μ.,  
 β) τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των δύο πλοίων στις 3 μ.μ.

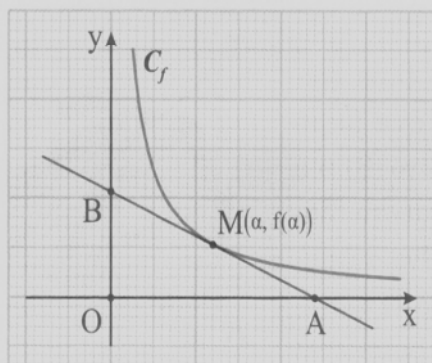
**17.24** Μια κάμερα είναι τοποθετημένη στην κορυφή ενός στύλου ύψους 3 m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  υπό την οποία η κάμερα παρακολουθεί ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 40 km/h, όταν αυτό:



**17.25** Μια λάμπα είναι τοποθετημένη σε μια κολόνα και φωτίζει από ύψος 5,1 m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της σκιάς ενός ανθρώπου, ύψους 1,70 m, ο οποίος απομακρύνεται με ταχύτητα 2 m/s από την κολόνα.

### 3. Προβλήματα με καμπύλες

**17.26** Η εφαπτομένη AB της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x}$  στο μεταβλητό σημείο της  $M(a, f(a))$  με  $a > 0$  τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.



- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο M.  
 β) Να αποδείξετε ότι  $AM = MB$ .  
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του a και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ως προς a.

**17.27** Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = (x - 1)^2$ . Η τεταγμένη του M είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ρυθμό 2. Να βρείτε τον

ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο M με τον άξονα  $x'x$  όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση:

$$x - y + 1 = 0$$

καθώς και την τεταγμένη x του M τη στιγμή εκείνη.

**17.28** Ένα σημείο  $M(x, y)$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 2x + 3$ . Αν τη χρονική στιγμή  $t_0$  η κλίση της f στο σημείο M είναι 25 και η τεταγμένη του M αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s, να βρείτε:

- α) την τεταγμένη του σημείου M,  
 β) τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του σημείου M.

**17.29** Μια ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης στρέφεται γύρω από το σημείο  $\Sigma(1, 1)$ . Αν ο συντελεστής διεύθυνσής της μεταβάλλεται με ρυθμό  $-4$  και η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία A, B, τότε:

- α) να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του συντελεστή διεύθυνσης,  
 β) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(3, 0)$ .

## 4ο κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα Α

- A1. α)** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;
- β)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τι λέμε κλίση της  $f$  στο  $x_0$ ; Τι εξίσωση έχει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ ;
- γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$ , ποια είναι η παράγωγος της  $g \circ f$  στο  $x_0$ ;

**A2. α)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι και συνεχής στο  $x_0$ . Ισχύει το αντίστροφο;

**β)** Να αποδείξετε ότι  $(\sin x)' = \cos x$  και  $(\cos x)' = -\sin x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**A3.** Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

**α)**  $(c)' = \dots$ ,  $(x)' = \dots$  και  $(\sqrt{x})' = \dots$

**β)**  $(\eta\mu x)' = \dots$ ,  $(\epsilon\phi x)' = \dots$  και  $(\sigma\phi x)' = \dots$

**γ)**  $(a^x)' = \dots$ ,  $(\ln|x|)' = \dots$  και  $(e^x)' = \dots$

**δ)**  $[f(x)g(x)]' = \dots$  και

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots$$

**ε)**  $(x^a)' = \dots$  και  $[f^n(x)]' = \dots$

### Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & \text{αν } x < 1 \\ \beta x^3 + (a-1)x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(-1, -3)$ .

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $\beta$ .

**B3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**B4.** Να βρείτε όλες τις εφαπτομένες της  $C_f$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $(\eta): y = 4x - 2008$ .

### Θέμα Γ

Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$  και:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) + \eta\mu 3h - 1}{h} = 7$$

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή  $f(2)$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παραγωγίζεται στο  $x_0 = 2$ .

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ .

### Θέμα Δ

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}, f(3) = 2$$

Αν ισχύει:

$$f(f(x) + 1)f(f(x)) = f(f(x) + 3)f(f(x) + 2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

- Δ1. υπάρχει  $x_0 \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 1$ ,
- Δ2.  $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ ,
- Δ3. υπάρχει  $x_1 \in [1, 2]$  τέτοιο, ώστε  $f^2(x_1) = f(1)f(2)$ ,
- Δ4. η  $f$  δεν αντιστρέφεται.