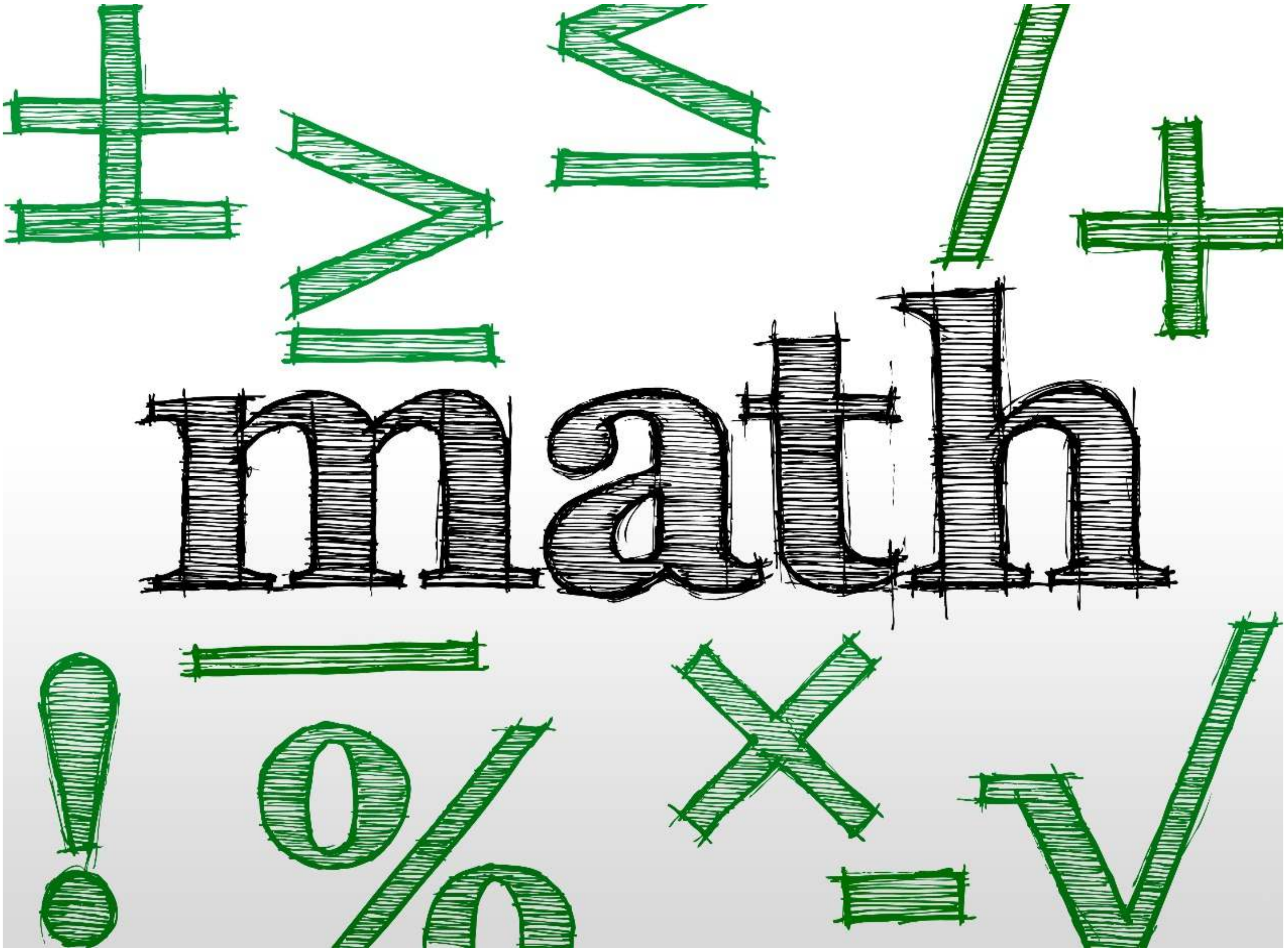

1. Ίσες συναρτήσεις

2.12 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες, όπου:

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ και $g(x) = |x - 1|$

β) $f(x) = \ln\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ και

$g(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 2)$

γ) $f(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 1}$ και

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 1}}$

δ) $f(x) = \ln x^4$ και $g(x) = 4\ln|x|$

2.13 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες.

α) $f(x)=\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2},\ \ g(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$

β) $f(x)=\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x-3},\ \ g(x)=\sqrt{x^2-7x+12}$

Αν $f\neq g$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$.

2.14 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες, όπου:

α) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x+1}$ και

$g(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x)=x+1$

γ) $f(x)=\sqrt{x^2+6x+9}$ και $g(x)=x+3$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+5|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{5}{|x|}$

ε) $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ και $g(x)=\sqrt{x}+3$

Αν $f\neq g$, σε ποιο σύνολο A είναι $f=g$;

2. Πράξεις με συναρτήσεις

2.15 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=x^2+3x-4$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g,\ \ f-g,\ \ f\cdot g,\ \ \frac{f}{g}\ \text{ και }\ \frac{g}{f}$$

2.16 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x-3$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g,\ \ f\cdot g,\ \ \frac{f}{g}\ \text{ και }\ \frac{g}{f}$$

2.17 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x}{x+3},\ \ g(x)=1-\frac{9}{x^2}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α) $f+g$ **β)** $f-g$ γ) $f\cdot g$

δ) $\dfrac{1}{f}$ ε) $\dfrac{f}{g}$ **στ)** $\dfrac{g}{f}$

2.18 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}\ \text{ και }\ g(x)=x-2$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g,\ \ f-g,\ \ f\cdot g,\ \ \frac{f}{g},\ \ \frac{g}{f}$$

γ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

2.19 Αν:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x<1\\ 2x, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}\ \text{ και}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \text{αν } x\leq 2\\ -x^2, & \text{αν } x>2\end{cases}$$

να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\dfrac{f}{g}$.

3. Σύνθεση συναρτήσεων

2.20 Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ και $g(x)=x^2-x+2$

β) $f(x)=\sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x)=x^2+x-2$

2.21 Να ορίσετε τη σύνθεση $g\circ f$ των συναρτήσεων f, g στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=x-1,\ \ g(x)=\sqrt{x}$

β) $f(x)=-x^2+5x-5,\ \ g(x)=\sqrt{x-1}$

γ) $f(x)=-e^x,\ \ g(x)=\ln x$

2.22 Να ορίσετε τη σύνθεση $f\circ g$ των συναρτήσεων f και g στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\sqrt{x-1},\ \ g(x)=\ln(x-1)$

β) $f(x)=\dfrac{x}{x-1},\ \ g(x)=\sqrt{x-2}$

γ) $f(x)=\ln(-x),\ \ g(x)=e^x+1$

2.23 Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$

β) $f(x)=x^2+x+2$ και $g(x)=\sqrt{1-|x-3|}$

2.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Να αποδείξετε ότι:

$$(f\circ f)(x)=x \quad \text{για κάθε } x\in D_f$$

2.25 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-3} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g\circ f$ και $g\circ g$.

2.26 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-2x+3 \quad \text{με } x\in[-3,1]$$

και

$$g(x)=x+2 \quad \text{με } x\in[-2,3]$$

α) Να ορίσετε τις $g\circ f$ και $f\circ g$.

β) Ποιο γενικό συμπέρασμα επαληθεύεται;

2.27 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2x+\alpha \quad \text{και} \quad g(x)=3x+2\alpha$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=1$, τότε $\alpha=-1$.

2.28 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $g(x)=x^2-3$ και $\Delta=[-2,1]$

β) $g(x)=x^3+x-3$ και $\Delta=[7,27]$

2.29 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{αν } x\le -1 \\ x^2+2x, & \text{αν } x>-1 \end{cases}$$

$$g(x)=x+1, \quad h(x)=x+2$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f+g$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ h$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης $C_{\frac{f}{g}}$ με τον άξονα x΄x.

2.30 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=3x+1 \quad \text{και} \quad g(x)=x+3$$

Να λύσετε την εξίσωση:

$$(g\circ f\circ f)(x)=(f\circ g\circ g)(x)$$

2.31 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,

β) αν $g(x)=-x$, τότε οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $-f$ είναι ίσες.

2.32 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(g\circ f)(x)=e^{x+1}+3$ και $g(x)=x+3$

β) $(g\circ f)(x)=2x^2-2x+5$ και $g(x)=2x-3$

γ) $(g\circ f)(x)=\ln(x^2+1)-1$ και $g(x)=\ln x-1$

δ) $(f\circ g)(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x-2$, $x\in\mathbb{R}$

ε) $f\big(\ln(g(x))\big)=x^2-3$ και $g(x)=x+2$

4. Θεωρητικές ασκήσεις

2.33 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f^2+g^2)(x)\le 2(f+g)(x)-2$$

$$\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

2.34 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f+g)^2(x)-(f-g)^2(x)-4x^2\ge$$
$$\ge 2(f+g)(x)\cdot[(f+g)(x)-2x]$$

$$\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

2.35 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η g είναι άρτια, τότε και η $f \circ g$ είναι άρτια.

β) Αν οι f και g είναι περιττές, τότε και οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι περιττές.

γ) Αν η f είναι άρτια και η g περιττή, τότε οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι άρτιες.

2.36 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(1)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(f \circ f)(x) = 3x - 2, \ x \in \mathbb{R}$

β) $(f \circ f \circ f)(x) = 4x - 3, \ x \in \mathbb{R}$

2.37 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(\alpha)$ όταν:

α) $(f \circ f \circ f)(x) = 3x - 2$ και $\alpha = 1$

β) $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 - 3x + 4$ και $\alpha = 2$

2.38 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = x^5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^5) = f^5(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2.39 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$\text{και } (g \circ f)(2) = 2$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

2.40 Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ τη σχέση:

$$f(x) + 2f(\pi - y) + g(x) - g(y) = 2\eta\mu x + \eta\mu y$$
$$\text{και } g(0) = 0$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \eta\mu x$ **β)** $f = g$

2.41 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 1$ και $g(x) = x + 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$(h \circ f)(x) + 3 \le (f + g)(x) \le (h \circ g)(x) - 1$$

2.42 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε:

$$g(x) = (f \circ f)(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν υπάρχει μοναδικός $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $g(\alpha) = \alpha$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = \alpha$.

2.43 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x^2 - (4\alpha - 1)x + 2\alpha^2, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Αν $f \circ g = g \circ f$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της g και η ευθεία με εξίσωση $y = x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

2.44 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) \ge f(x) + f(y) \ge x + y$$
$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

β) η f είναι περιττή συνάρτηση,

γ) ο τύπος της f είναι $f(x) = x$.

2.45 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f \circ f)(x) = -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιττή,

β) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

2.46 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + x + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - x + 2$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

με την ιδιότητα:

$$(h \circ f)(x) + (h \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$
$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2.47 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, ώστε για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ να ισχύει:

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3) = g(x_1)g(x_2)g(x_3)$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2.48 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = 4 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2) = 2$,

β) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

γ) $f(x) + f(4 - x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $M(2, 2)$.

2.49 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x + y)\big(f(x) + f(y)\big)$$
$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $f(0)$.

β) Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0) \neq 1$ και να βρείτε τον τύπο της f.

Η κατανόηση της θεωρίας

2.50 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

β) Πώς ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$;

γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ και ποιος ο τύπος της;

2.51 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Οι f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το .... πεδίο .... A και .... για κάθε $x \in A$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A, τότε οι $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ έχουν πεδίο ορισμού το ...... και τύπο:

$(f + g)(x) =$ ....,

$(f - g)(x) =$ ....,

$(f \cdot g)(x) =$ ...., αντίστοιχα.

γ) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το .... και τύπο ....

δ) Η συνάρτηση $g \circ f$, αν ορίζεται, έχει πεδίο ορισμού το .... και τύπο ....

2.52 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.

β) Ισχύει ότι $g \circ f = f \circ g$, αρκεί να ορίζονται οι δύο αυτές συναρτήσεις και να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. ***(Θέμα εξετάσεων)***

γ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις:

$$(f \circ g) \circ h \quad \text{και} \quad f \circ (g \circ h)$$

τότε είναι ίσες.

δ) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g$.

ε) Αν $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f \cdot f = g \cdot g$, δηλαδή $f^2 = g^2$, τότε $f = g$ ή $f = -g$.

στ) Αν $f, g: A \to \mathbb{R}$ και:

$$f(x)g(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in A$$

τότε:

$$f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in A \quad \text{ή}$$
$$g(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in A$$

ζ) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(x^2) = x^4 + x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.