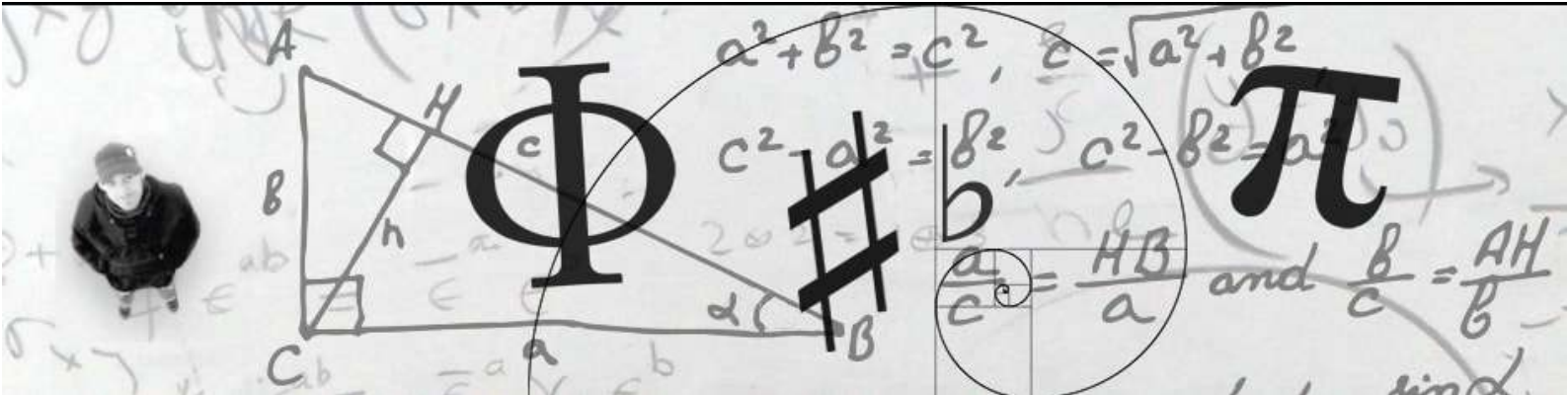




Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σταθερή συνάρτηση - Εύρεση της σταθερής

20.28 Αν $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = f^2(x) - g^2(x)$$

είναι σταθερή,

β) αν $f(0) = 2$ και $g(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της h .

20.29 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

20.30 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι σταθερές:

α) $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2, \quad x \in \mathbb{R}$

β) $h(x) = f(x)\eta\mu x + f'(x)\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

20.31 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = 2f(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(-x) = 2f(x), \quad x \in \mathbb{R},$

β) η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x), \quad x \in \mathbb{R},$ είναι σταθερή.

20.32 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με:

$$f'(x) = f^2(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = f(x)e^{-g(x)}$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

20.33 Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ακόμη είναι $f(0) = 1$ και $g(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

$$h(x) = (f(x) + g(x))e^{-x} \quad \text{και}$$

$$\varphi(x) = (f(x) - g(x))e^x$$

είναι σταθερές στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τους τύπους των f, g .

20.34 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

$f'(x) = ag(x)$ και $g'(x) = -af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

$$h(x) = f^2(x) + g^2(x) \quad \text{και}$$

$$\varphi(x) = (f(x) - \eta\mu ax)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu ax)^2$$

είναι σταθερές στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g .

20.35 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με:

$$f'(x) = -2xf^2(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(0) = 1$$

Αν $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή,

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f ,

γ) να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$.

(Θέμα εξετάσεων)

20.36 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο,
 β) $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x) = 0$
 για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 γ) η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή,
 δ) αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, όπου x_1, x_2 είναι ρίζες της $f(x) = 0$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

(Θέμα εξετάσεων)

20.37 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{με } f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αν $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 2 \text{ για κάθε } x > 0$$

20.38 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(-x) + x = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20.39 Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ισχύει:

$$f(0) = 0 \text{ και:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$g(x) = f(\tan x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(\tan x) = x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Συναρτήσεις με ίσες παραγώγους

20.40 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f'(x) = 2x + 5, x \in \mathbb{R}$
 και $f(0) = 7$
 β) $f'(x) = 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2, x \in \mathbb{R}$
 και $f(1) = 9$
 γ) $f''(x) = 12x^2 + 6, x \in \mathbb{R}$
 και $f'(0) = 6, f(0) = 7$
 δ) $f^{(3)}(x) = 60x^2 + 6, x \in \mathbb{R}$
 και $f''(0) = 0, f'(0) = f(0) = 1$

20.41 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f'(x) = \sin x - \eta \mu x, A = \mathbb{R}, f(0) = 3$
 β) $f'(x) = 2\sin x - 3\eta \mu x, A = \mathbb{R}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$
 γ) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, A = (0, +\infty), f(1) = 4$
 δ) $f'(x) = e^x + \eta \mu x, A = \mathbb{R}, f(0) = 1$

20.42 Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν:

- α) $f'(x) = e^x + e^{-x} + 2, x \in \mathbb{R}, f(0) = 3$
 β) $f'(x) = 4e^{2x} - 2e^{-2x} + 3, x \in \mathbb{R}, f(0) = 4$
 γ) $f'(x) = 2\sin 2x + 3\eta \mu 3x, x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$
 δ) $f'(x) = e^{x-1} + 3x^2, x \in \mathbb{R}, f(1) = 4$
 ε) $f'(x) = \frac{3}{x-1} + 2x, x > 1, f(2) = 5$

20.43 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f'(x) = 2\sin x + \eta \mu x, x \in \mathbb{R}, \text{ και } f(0) = 3$
 β) $f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x}, x > 0, \text{ και } f(1) = 2$
 γ) $f''(x) = 4e^{2x} + 6x, x \in \mathbb{R}, \text{ και } f'(0) = f(0) = 2$

20.44 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $x \in A = \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 2x + 5 \text{ και } f(0) = 1$
 β) $A = (0, +\infty), f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x}, \text{ και } f(1) = e^2$
 γ) $x \in A = \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin 2x - \eta \mu x \text{ και } f(\pi) = 2$

δ) $A = \mathbb{R}$, $f'(x) = \eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 2x$ και $f(0) = -\frac{1}{3}$

20.45 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f όταν:

α) $A = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(x-1)e^{x^2-2x+1}$
και $f(1) = 2$

β) $A = \mathbb{R}$, $f'''(x) = 24x + 12$
και $f''(0) = f'(0) = f(0) = 6$

γ) $x \in A = \mathbb{R}$, $f''(x) = 4e^{-2x} + 6x + 2$
και $f'(0) = f(0) = 1$

δ) $x \in A = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
και $f(-1) = f(1) = 2$

20.46 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ και $f(1) = 5$

β) $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu 2x - e^{-x}$ και $f(0) = 5$

γ) $f'(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x}$, $f(1) = 8$ και $f(-1) = 2$

20.47 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ και $f(-1) = 1$

β) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ και $f(0) = 1$

20.48 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$f''(x) + f''(4-x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και $f(2) = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) - f'(4-x) = 2x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$

20.49 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(2x-1) = 4x+1$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$
και $f(1) = 6$

β) $f'(x^2) = 6x - 2$ για κάθε $x \in A = (0, +\infty)$
και $f(1) = 2$

20.50 Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$xf'(\ln x) = x^2 - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

Αν $f(0) = 2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f(\ln x) = x + \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

β) να βρείτε τον τύπο της f .

20.51 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(2x-1) = 12x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f έχει στο σημείο $M(1, f(1))$ εφαπτομένη με εξίσωση $y = 3x - 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

20.52 Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x^3) = 2x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στη C_f , να βρείτε τον τύπο της f .

3. Εύρεση με βοηθητική συνάρτηση

20.53 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 1$, $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$

β) $e^x f'(x) + e^x f(x) = 2x$, $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

γ) $\ln x f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 0$, $A = (1, +\infty)$, $f(e) = 2$

δ) $(2 + \eta\mu x)f'(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x) = 3$, $A = \mathbb{R}$,
 $f(0) = 0$

ε) $f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x = 1$, $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
 $f(0) = 1$

20.54 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όταν:

α) $xf'(x) - f(x) = x^2$, $A = (0, +\infty)$,
 $f(1) = 3$

β) $(x^2+1)f'(x) - 2xf(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $A = \mathbb{R}$,
 $f(0) = 0$

γ) $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = 2x\eta\mu^2 x$, $A = (0, \pi)$,
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$

δ) $f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = 0$, $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
 $f(0) = 2$

20.55 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f'(x) = 2xf(x)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$
β) $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$
γ) $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$
δ) $f(x)f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$

20.56 Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με:

$$f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ για κάθε } x > 1$$

Αν στο σημείο $M(e, f(e))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη, να βρείτε τον τύπο της f .

20.57 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - y = 2007$.

20.58 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
(Εξετάσεις 2005)

20.59 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

με $f(1) = \frac{1}{2}$ και:

$$f'(x) = -2f^3(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε:

- α) την παράγωγο της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{1}{f^2(x)}$$

- β) τον τύπο της συνάρτησης f .

20.60 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

- β) Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη της στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με την ευθεία:

$$(\varepsilon): 2x - y - 3 = 0$$

να βρείτε τον τύπο της f .

20.61 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ και:

$$(f(x) - 1)f'(x) = e^x(e^x + 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) = 2f(x) + e^x(e^x + 2), \quad x \in \mathbb{R}$$

- β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.62 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \sqrt{3}$ και:

$$\frac{f'(x)f(x)}{e^x} = \sqrt{1 + f^2(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{1 + f^2(x)} = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.63 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = 2$$

η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) - e^x)^2 = 1$$

- β) Να αποδείξετε ότι η:

$$h(x) = f(x) - e^x$$

διατηρεί σταθερό θετικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

- γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

4. Η μορφή $f'(x) + g(x)f(x) = h(x)$

20.64 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της όταν:

α) $f'(x) + 2f(x) = 0, x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$

β) $f'(x) + 3f(x) = 0, x \in \mathbb{R}, f(0) = 3$

γ) $f'(x) - 2f(x) = 0, x \in \mathbb{R}, f(0) = 2$

δ) $f'(x) = 3f(x), x \in \mathbb{R}, f(0) = 3$

ε) $f'(x) + f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$

στ) $f'(x) + 2f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}, f(0) = 2$

20.65 Η κλίση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής της f στο x . Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

20.66 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = g(0) = 2, f'(x) = 3g(x) \text{ και}$$

$$g'(x) = 3f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν ισχύει:

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ και } \varphi(x) = f(x) - g(x)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $h'(x) = 3h(x)$ και $\varphi'(x) = -3\varphi(x), x \in \mathbb{R}$

β) $h(x) = 4e^{3x}$ και $\varphi(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = 2e^{3x}$ και $g(x) = 2e^{3x}, x \in \mathbb{R}$

20.67 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = e$ και:

$$x(f'(x) - f(x)) = f(x) \text{ για κάθε } x \geq 0$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.68 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in (0, \pi)$$

$$\text{και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{e^\pi}$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

20.69 Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g με:

$$f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(0) = g(0)$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20.70 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$f''(x) + f(x) = 2f'(x), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(0) = 1 \text{ και } f(0) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) - f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1}$.

20.71 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) + 2xf(x) = 2x, A = \mathbb{R}, f(0) = 2$

β) $f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \sin x, A = \mathbb{R}, f(0) = 3$

γ) $xf'(x) + 2f(x) = 2, A = (0, +\infty), f(1) = 2$

δ) $xf'(x) + 3f(x) = \frac{2}{x}, A = (0, +\infty), f(1) = 2$

20.72 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, έχει τις ιδιότητες:

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(0) = f'(0) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) + f(x) = 2e^x, x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

20.73 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = f'(0) = 1$ και $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20.74 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με συνεχή παράγωγο, για τις οποίες ισχύουν:

$$f(0) = 1 \text{ και}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f'(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20.75 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει:

$$(e^x - 1)f(x) = (e^x - x)(f(x) - f'(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\text{και } f(0) = 1$$

20.76 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{e^x - 1} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\text{και } f(1) = \frac{e}{e-1}$$

20.77 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(0) = 1$ έχει την ιδιότητα:

$$(x-1)^2 f(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

β) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

5. Εύρεση σε ένωση διαστημάτων

20.78 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $xf'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(-1) = 5$, να βρείτε τον τύπο της f .

20.79 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2 f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και $f(0) = 2$

β) $(x-2)f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και $f(2) = 7$

γ) $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
και $f(0) = 1$

$$xf'(x) = 2x^3 + 3x^2 + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η κλίση της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι ίση με 5, τότε:

α) να βρείτε το $f(0)$,

β) να αποδείξετε ότι $f''(x) = 6x + 6$ για κάθε $x \neq 0$,

γ) να βρείτε τον τύπο της f ,

δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(-1, f(-1))$.

20.82 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με:

$$2f(x) = x(1 + f'(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f'' είναι σταθερή,

β) αν $f'(1) = 3$, τότε $f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

20.80 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με:

$$(x-1)(f'(x) + 1) = 2f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f''(1) = 2$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f''(x)$ είναι σταθερή,

β) $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

20.81 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

20.83 Δίνονται οι περιττές συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

με $f(1) = g(1) = 1$ και:

$$f'(x) = -g^2(x), \quad g'(x) = -f^2(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) - g^3(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$,

β) $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

6. Σταθερή συνάρτηση και συναρτησιακές σχέσεις

20.84 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^4 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

20.85 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, $f'(0) = 2$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

20.86 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(x + y) + f(x + 2y) = 2f(x) + 3y$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Αν η C_f εφάπτεται με τη C_g , όπου $g(x) = 5 - \frac{1}{x}$, στο σημείο $A(1, \gamma)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) να βρείτε τον τύπο της f .

20.87 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x - y) = f(x)f(y) + \eta\mu x \cdot \eta\mu y$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 1$

β) $f(x) = \sin x$

20.88 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f'(0) = 1$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x + y) = f(x)f(y)$.

20.89 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, $f(0) = f'(0) = 2$ και ισχύει:

$$f(x + y)f(x - y) = f^2(x)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$

20.90 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με:

$$f'(0) = f(0) \text{ και}$$

$$f(x + y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.91 Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει την ιδιότητα:

$$f(x + 2y) = f(x) - 2f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

7. Συμπληρωματική ομάδα ασκήσεων

20.92 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και}$$

$$(f(x) - f'(x))^2 = 2f'(x)f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

20.93 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ και:

$$f'(x) = f(x) + g(x) \text{ και } g'(x) = g(x) - f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$h(x) = [f(x)e^{-x} - \eta\mu x]^2 + [g(x)e^{-x} - \sigma\eta\nu x]^2$$

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

20.94 Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με:

$$f(x) + f''(x) = g(x) + g''(x)$$

και οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση:

$$h(x) = [f(x) - g(x)]^2 + [f'(x) - g'(x)]^2$$

είναι σταθερή,

β) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20.95 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\diamond f''(x) = 3e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - f(x)$$

$$\diamond (f(0))^2 + (f'(0))^2 = 2f(0) - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = (f(x) - e^{x^2})^2 + (f'(x) - 2xe^{x^2})^2$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.96 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

$$f'(x) = xg(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = -xf(x)$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$h(x) = \left(f(x) - \eta\mu \frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(g(x) - \sigma\upsilon\nu \frac{x^2}{2}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

20.97 Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $\Delta = (0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και:

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x$$

είναι σταθερή στο Δ .

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.98 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$f(1) = f'(1) = 1 \quad \text{και}$$

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = (f(x) + x)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει σταθερή παράγωγο.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

20.99 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f :

α) $g(x) = f(x)e^{-2x}$ με $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 3$

και $A = \mathbb{R}$

β) $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$ με $f'(x) = f(x)\epsilon\phi x$, $f(0) = 1$

και $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ με $f(x) = xf'(x)$, $f(-1) = f(2) = 2$

και $A = \mathbb{R}^*$

20.100 Αν για τη συνάρτηση f είναι:

$$f'(x^2 + 2x + 1) = 3x + 1 \quad \text{για κάθε } x \geq -1$$

$$\text{και } f(1) = -1$$

να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

20.101 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(0) = f'(0) = 1$

β) $f''(x) + 2f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(1) = f'(1) = 0$

20.102 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(0) = 1$ και:

$$f(x)f'(-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)f(-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

20.103 Να βρείτε τις δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$f(x)g(x) = 1 \quad \text{και} \quad f'(x)g'(x) = -1$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20.104 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(1) = 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

♦ $f^2(x) = e^{g(x)}$ για κάθε $x > 0$

♦ $f(x)g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_g που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

20.105 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με $g(1) = 2004$ και:

$$f(g(x)) = x - \frac{1}{x}, \quad f'(g(x)) = x + \frac{1}{x}$$

για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln x + 2004$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

20.106 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ για κάθε } x \neq a$$

και $f(a) = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι σταθερός αριθμός.

Αν η κλίση της f στο a είναι β , να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = a + \beta(x - a) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20.107 Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με:

$$(f - g)(x) = (g' - f')(x)$$

και οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20.108 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) - f(x) = yf'(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f εφάπτεται της C_g στο σημείο $A(0, g(0))$, όπου $g(x) = (x + 1)^2$, να βρείτε:

α) το $f(0)$ και το $f'(0)$,

β) τον τύπο της συνάρτησης f .

20.109 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

καθώς και οι συναρτήσεις g, h με:

$$g(x) = f(x) - xf'(x) \text{ και}$$

$$h(x) = f(x) + f(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση g είναι περιττή, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = g(0) = 0$,

β) $xh'(x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

γ) $f(x) + f(-x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c σταθερά του $\mathbb{R}$.

Η κατανόηση της θεωρίας

20.110 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται σταθερή;

β) Ποιες προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ ;

γ) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

δ) Ποιες προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ότι δύο συναρτήσεις f και g διαφέρουν κατά μία σταθερά σε ένα διάστημα Δ ;

ε) Αν δύο συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν ίσες παραγώγους, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ίσες;

στ) Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

μπορούμε με βεβαιότητα να συμπεράνουμε ότι η f είναι σταθερή στο A ;

20.111 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα Δ είναι στο Δ και για κάθε σημείο x του Δ , τότε η f είναι σε όλο το διάστημα Δ .

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι σε ένα Δ και για κάθε σημείο x του Δ , τότε υπάρχει τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

20.112 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

β) Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε:
 $f(x) = g(x) + c, x \in A$

γ) Ισχύει ότι:

$$f'(x)e^{f(x)} = (e^{f(x)})' \text{ και } \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln|f(x)|)'$$

δ) Ισχύει ότι:

$$f'(x)f^v(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1}\right)' \text{ και } \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = (2\sqrt{f(x)})', \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^*$$

ε) Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους, τότε αυτές διαφέρουν κατά μία σταθερά.

στ) Αν $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$f(x) = g(x) + \alpha x + \beta$$

για κάποιες σταθερές α και β .

ζ) Αν οι f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και:

$$f'(x) = g'(x)$$

για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = g(x) + c$. (Θέμα εξετάσεων)

20.113 Να αποδείξετε τα παρακάτω θεωρήματα:

α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (Εξετάσεις 2009)

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

(Θέμα εξετάσεων)

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ20.1 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$f'(x+y) = \frac{1}{2}f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 2$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$, να βρείτε:

α) το $f(0)$,

β) τον τύπο της f ,

γ) την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θ20.2 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με:

$$f'(x) = f(x) + g(x), \quad g'(x) = g(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x} - \eta\mu x\right)^2 + \left(\frac{g(x)}{e^x} - \sigma\upsilon\nu x\right)^2$$

είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

γ) Να βρείτε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

δ) Να βρείτε το όριο $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{2x} + 1}$.

Θ20.3 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η συνάρτηση

$$h(x) = (f'(x))^2 + (f(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή,

γ) $f(x) = \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ20.4 Για μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = 1 + x^2 f'(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

α) Αν $g(x) = f(x)e^{\frac{1}{x}}$, να αποδείξετε ότι:

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}} + c \text{ για κάποια σταθερά } c \in \mathbb{R}$$

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Θ20.5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0)$ και:

$$f''(x) = g''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$f(x) - g(x) = cx \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) αν ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < 0 < \rho_2$, είναι ρίζες της $g(x) = 0$, τότε η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Θ20.6 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$ και:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$,

β) $f(x) = x \ln x$, $x > 0$,

γ) η C_f εφάπτεται με την ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$.

Θ20.7 Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Αν $f'(0) = f(0) = 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f έχει σταθερή παράγωγο,

β) να βρείτε τον τύπο της f ,

γ) να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται της C_g , όπου $g(x) = e^x$.

Θ20.8 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με:

$$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) + 1 = 0$$

για κάθε $x \in (0, 2)$

Αν $f'(1) = 0$ και $f(1) = 1$:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) = 2x - x^2 \text{ για κάθε } x \in (0, 2)$$

β) να βρείτε τον τύπο της f ,

γ) αν M, N είναι τυχαία σημεία της C_f , να αποδείξετε ότι $(MN) \leq 2$.

Θ20.9 Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(\sqrt{2}) = 0 \text{ και } f'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

έχει την ιδιότητα:

$$f''(x) = e^{f(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $(f'(x))^2 = 2f''(x)$

β) $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = \ln \frac{2}{x^2}$, $x > 0$

Θ20.10 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την ιδιότητα:

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) + 2xf(x)f'(x) = x$$

για κάθε $x > -1$

Αν ισχύει:

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = \frac{1}{2}$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \geq -1$$

β) να βρείτε τον τύπο της f .

Θ20.11 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x) \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Αν $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ για κάθε $x > 0$,

β) $f'(x) + \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$ για κάθε $x > 0$,

γ) $f(x) = \ln x, x > 0$.

Θ20.12 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x+y) \leq f(x)f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(0) = f'(0) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x+h) - f(x) \leq f(x)(f(h) - 1) + xh$

β) $f'(x) = f(x) + x$

γ) $(-(x+1)e^{-x})' = xe^{-x}$

δ) $f(x) = 2e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$

Θ20.13 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 2f'(0) = 1$ και:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Θέμα εξετάσεων)

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ και:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Εξετάσεις 2005)

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 3$,

$$f(x) \neq x \text{ και } f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(Εξετάσεις 2010)

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f'(0) = f(0) = 0$ και:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Εξετάσεις 2011)

ε) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και:

$$f'(x) + 2x = 2x(f(x) + x^2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Εξετάσεις 2010)

στ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Εξετάσεις 2013)

ζ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο:

$$A = (0, +\infty)$$

και ισχύει ότι:

$$(x^2 - x)f'(x) + xf(x) = 1$$

$$\text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

(Εξετάσεις Ιουνίου 2015)

η) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο:

$$A = \mathbb{R}$$

και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

- $f(0) = 0$.

(Εξετάσεις Μαΐου 2015)

5ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

- A1.** α) Να διατυπώσετε τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική τους ερμηνεία.
β) Για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποια μορφή έχει ο τύπος της f ;
- A2.** α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c , ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
α) Αν για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, ισχύει ότι $f(a) = f(\beta)$, τότε για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.
β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.
γ) Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή.
δ) Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε $f(x) = g(x) + c$.
ε) Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = ce^x$.

Θέμα Β

Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και:
 $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$

Να αποδείξετε ότι:

B1. $f(a) \neq f(\beta)$,

B2. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{f(a) + 2f(\beta)}{3}$,

B3. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $\frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)} = 2 \frac{\beta - x_0}{x_0 - a}$,

B4. υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 τέτοια, ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi_3)}$.

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(1) = 0, f'(1) = -1 \text{ και } f''(x) = e^{2f(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. η f παραγωγίζεται και τρίτη φορά,

Γ2. $f''(x) = [f'(x)]^2$,

Γ3. η συνάρτηση $g(x) = -f'(x)e^{-f(x)}$, $x > 0$, είναι σταθερή,

Γ4. $f'(x) = -e^{f(x)}$ για κάθε $x > 0$,

Γ5. $f(x) = -\ln x$, $x > 0$.

Θέμα Δ

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x) \leq x + 1 \text{ και } 1 + f(x + y) \leq f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f(0) = 1$,

Δ2. $f(x) + f(-x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Δ3. ο τύπος της f είναι $f(x) = x + 1$,

Δ4. η C_f εφάπτεται με τη C_g , με $g(x) = e^x$, και να συμπεράνετε ότι $e^x \geq x + 1$.