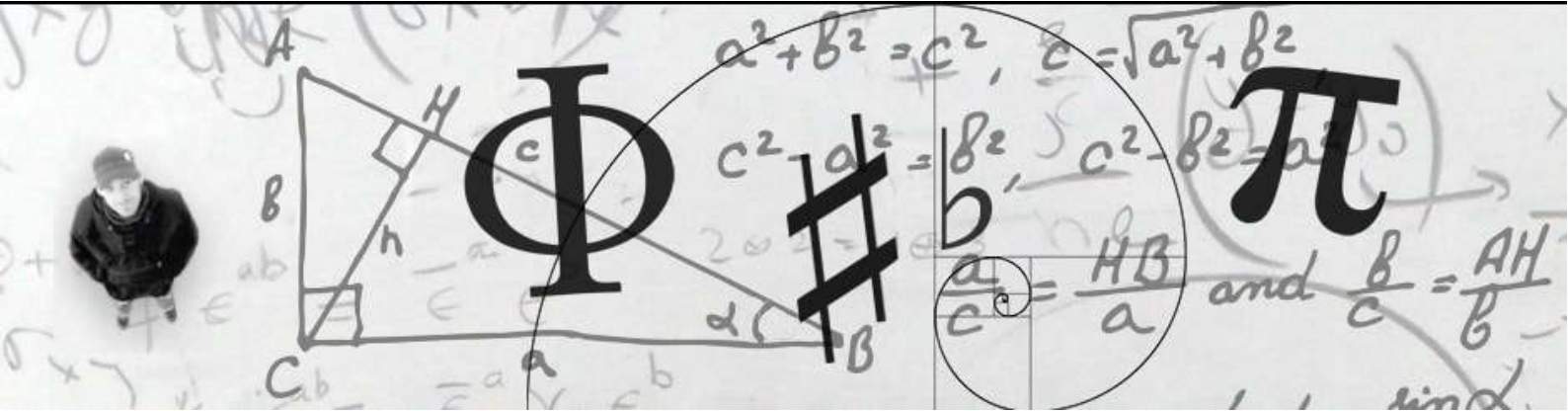




Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Θεώρημα Fermat - Κρίσιμα σημεία

2.21 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{αν } x < 1 \\ x^3 - 3x^2 + 5, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

β) $g(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 6, & \text{αν } x \in [-3, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3, & \text{αν } x \in [1, 3] \end{cases}$

2.22 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - 6x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε:

- α) την παράγωγο της f ,
β) τα κρίσιμα σημεία της f .

2.23 Να αποδείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τη σχέση:

$$f^2(x) + 2f(x) = x^3 + x + e^x$$

δεν έχει κρίσιμα σημεία.

2.24 Αν x_1 και x_2 είναι κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$f''(x_1) + f''(x_2) = 0$$

2.25 Αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x^2 + x + \beta} \quad \text{και}$$

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

έχουν τα ίδια κρίσιμα σημεία, να υπολογίσετε τους a και β .

2.26 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $a, \beta > 0$ με $a < \beta$ τέτοια, ώστε $af'(a) + \beta f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

2.27 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ αλλά όχι αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

2. Εύρεση τοπικών ακροτάτων

2.28 Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(1) = 3$,
 $f(2) = -5$

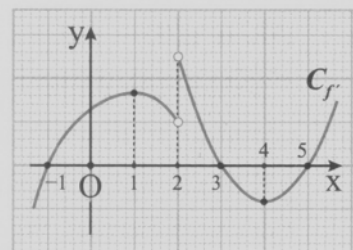
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

β) $g(-1) = 2$,
 $g(1) = 7$,
 $g(3) = 1$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	+
$g(x)$						

2.29 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της παραγωγού μιας συνεχούς συνάρτησης:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f .

2.30 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \beta) f(x) = x^3 - 3x$$

$$\gamma) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$\delta) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad \varepsilon) f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

2.31 Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = e^x - x \quad \beta) f(x) = \ln x - x$$

$$\gamma) f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \delta) f(x) = \ln(4 - x^2)$$

2.32 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = 2x^2 - 8x + 3$$

$$\beta) f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1} \quad \delta) f(x) = \frac{4x + 5}{x^2 - 1}$$

2.33 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 30$$

$\alpha)$ Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία της C_f με τετμημένες τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f και το $O(0, 0)$ είναι συνευθειακά.

2.34 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1} + \ln(x - 1)$$

$\alpha)$ Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

$\beta)$ Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

2.35 Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \beta) f(x) = |x^2 - 1| + 2$$

$$\gamma) f(x) = e^{-x} + x \quad \delta) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\varepsilon) f(x) = x^x \quad \sigma\tau) f(x) = \ln(\ln x) - \ln x$$

2.36 Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)$$

$$\beta) g(x) = e^{2x} - 6e^x + 4x + 1$$

$$\gamma) f(x) = x^3(1 - 3\ln x) - 36x(1 - \ln x)$$

2.37 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1}$$

$$\beta) g(x) = (x-1)(e^x - x) - e^x + \frac{x^2}{2}$$

2.38 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-1)^2, & \text{αν } x < 1 \\ -(x^2 - 4x + 3)^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\beta) g(x) = \begin{cases} 1 - \eta\mu x, & \text{αν } x \in [-\pi, 0) \\ \sigma\upsilon\nu x - x, & \text{αν } x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

2.39 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \alpha^2 - 4\alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α μια πραγματική σταθερά.

$\alpha)$ Αν $f(x_1) = 3f(x_2) + 50$, όπου x_1 η θέση τοπικού μεγίστου και x_2 η θέση τοπικού ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

$\beta)$ Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής;

2.40 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\kappa x - x^2}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$.

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

$\gamma)$ Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου:

$$A(2, f(2)) \text{ και } B(4, f(4))$$

(Εξετάσεις 2005)

2.41 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - x + 2, \quad x > 0$$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .
 γ) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β και γ , αν ισχύει η σχέση:

$$\ln(\alpha\beta\gamma) + 3 = \alpha + \beta + \gamma$$

Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα

2.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + x + 1 \text{ με } \alpha \in (-2, 2)$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

2.43 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + (\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 5)x + 4$$

Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

2.44 Να αποδείξετε ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

- α) $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$ για κάθε $x > 0$
 β) $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.45 Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^2(x) + e^x f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

2.46 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) - 2 = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

2.47 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + xf^2(x) = 2x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο α .

2.48 Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

(Θέμα εξετάσεων)

3. Εύρεση παραμέτρων

2.49 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$$

να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία:

$$x_1 = -1 \text{ και } x_2 = 1$$

2.50 Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3(\alpha + 2)x^2 + 6\alpha^2x + 3$$

να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$.

2.51 Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3(\alpha - 1)x^2 + 6\alpha^2x + 1$$

να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο:

$$x_0 = -1$$

2.52 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2(\alpha + 1)\ln x + \beta x^2 - (2\alpha + \beta)x + 1$$

- α) Να βρείτε τα α και β , ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
 β) Να βρείτε το είδος των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

2.53 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2e^x - 2 - \alpha x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + 2e^x \geq 2(1+x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha \ln 2x + \frac{\beta}{x} + \alpha$$

η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο το $2 + \ln 2$.

α) Να βρείτε τα α, β .

β) Για $\alpha = \beta = 1$:

i) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα,

ii) να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f'(1))$.

2.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 + 6\beta x^2 + 12(\beta^2 + \beta)x + 2\alpha$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$ και η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ τοπικό μέγιστο.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β .

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι κάθετες στην ευθεία:

$$x + 24y + 12 = 0$$

2.56 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

(Θέμα εξετάσεων)

2.57 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta x + 1}, \quad -2 < \alpha < \beta < 2$$

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

β) Αν τα τοπικά ακρότατα είναι αντίστροφοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι αντίθετοι.

2.58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Αν το $f(-1) = 2$ είναι τοπικό ακρότατο της f , να βρείτε τις τιμές των α, β .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

4. Από ανισότητα σε ισότητα

2.59 Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

2.60 Αν $\alpha^x \geq \ln(x+1) + 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$. (Εξετάσεις 2009)

2.61 Αν $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$ ($\alpha, \beta > 0$).

2.62 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$$

όπου $m > 0$.

α) Να βρείτε το m , ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να εξετάσετε αν η παραπάνω τιμή του m είναι δεκτή. (Θέμα εξετάσεων)

2.63 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$xf(x) + 1 \leq e^x + \eta \mu 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$.

2.64 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν ισχύει:

$f(2x+1) \geq 2e^{2x+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2e$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο:

$$A(1, f(1))$$

2.65 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + 1 \geq x^2 + \sin x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

2.66 Αν οι αριθμοί α , β και γ είναι θετικοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$$

να αποδείξετε ότι οι α , β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

2.67 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με:

$$f(\alpha) = g(\alpha) \text{ και}$$

$$f(x) + x^3 \leq g(x) + \alpha^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο α , να αποδείξετε ότι:

$$f'(\alpha) - g'(\alpha) = -3\alpha^2$$

2.68 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2^x + 3^x - 6^x, x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μέγιστο της f .

β) Αν $2^x + 3^x + \alpha^x \leq 1 + 5^x + 6^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (0, +\infty)$.

2.69 Αν είναι:

$$\alpha^x \geq \alpha + e \ln x \text{ για κάθε } x > 0$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

5. Σύνολο τιμών σε ανοικτό ή κλειστό διάστημα

2.70 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών.

γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

2.71 Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 3, x \in [-3, 2]$

β) $g(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2, 2]$

2.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Θέμα εξετάσεων)

2.73 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3}$$

Να βρείτε:

α) τα διαστήματα μονοτονίας της f ,

β) τα τοπικά ακρότατα της f ,

γ) το σύνολο τιμών της f .

2.74 Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x + 1$

β) $g(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 1$

6. Πρόσχημο ακροτάτου - Πλήθος ριζών εξίσωσης

2.75 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 3$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ καθώς και το σύνολο τιμών της f .

2.76 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 - 5x + 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

ε) Να εξετάσετε αν η f είναι " $1-1$ ".

2.77 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -x^3 + 3x - \alpha$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $|a| < 2$, να βρείτε:

i) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^3 + a = 3x$$

ii) το σύνολο τιμών της f .

2.78 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + \lambda = 0$$

όταν η παράμετρος λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

2.79 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^5 - 5a^4x + 4a^3 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - 5a^4x + 4a^3$.

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της παραπάνω συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης αυτής.

7. Ανισότητες και ακρότατα

2.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $\pi^e < e^\pi$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

2.81 Να αποδείξετε ότι:

α) $1 + \ln(1 - x) \leq e^{-x}$ για κάθε $x < 1$,

β) η εξίσωση $e^{-x} - 1 = \ln(1 - x)$ έχει μοναδική ρίζα.

2.82 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \varepsilon \phi x - x - \ln(\sin x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon \phi x - \ln(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

2.83 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (1 - x)(2x^2 - x - 7) - 6x^2(1 - \ln x) + 6$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

2.84 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 6xe^{-x} + 12e^{-x} - x^3 + 6x + 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.

2.85 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x - x + 1$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln x + 2 \leq 2\sqrt{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}} \quad \text{για κάθε } x > 1$$

8. Θεωρητικές ασκήσεις

2.86 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + x^3 = 3xf(x) - 1$$

Αν το $f(a)$ είναι τοπικό ακρότατο της f , να αποδείξετε ότι $a = 1$.

2.87 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

2.88 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία α, β με $\alpha < \beta$.

Αν $g(x) = e^{\frac{1}{n(x)}} \cdot f'(x)$, τότε:

α) να βρείτε την παράγωγο της g ,

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\gamma) = \left(\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} \right)^2$$

2.89 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$2f(x^2) - f^2(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f δεν αντιστρέφεται,

β) η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο x_0 ,

γ) οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(1, f(1))$ είναι παράλληλες,

δ) υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της γραφικής παράστασης της f' στα οποία οι εφαπτομένες τους είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

2.90 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$2f(x) \geq f(1) + f(2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = f(2)$,

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2.91 Έστω μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$. Αν $f(a) = -1$ και $f(\beta) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

β) η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (a, β) .

2.92 Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [2, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με:

$$f(2) = f(4) = 2 \text{ και } f(3) = -1$$

Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 3$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο διάστημα $(2, 3)$,

β) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f ,

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -9$.

Συμπληρωματική ομάδα

2.93 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{1}{2\eta\mu^2 x} + \ln|\eta\mu x|, x \in (0, \pi)$

β) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\ln(1 - \sigma\upsilon\nu x), x \in (0, \pi)$

γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 6\ln(2 + \sigma\upsilon\nu x), x \in [0, 2\pi]$

δ) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x + 1)$

2.94 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f' στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

2.95 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (\lambda^2 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)x + 2015$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

β) Για τις προηγούμενες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

2.96 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x - x + \frac{x^2}{2} - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο να βρείτε.

γ) Να εξετάσετε αν το κρίσιμο σημείο της f είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της f .

2.97 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 6xe^{-x} + 5e^{-x} + 2x - 7 \text{ και}$$

$$g(x) = x^3 - 4x + 5 - 7e^{-x}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο M .

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M .

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης:

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

2.98 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, αντιστρέψιμη και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Η f' είναι συνεχής και αντιστρέψιμη. Αν η συνάρτηση $g(x) = f(f(x))$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 2, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f'(2) \neq 0$,

β) να βρείτε την τιμή $f^{-1}(1)$.

2.99 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^2 - 2 \ln \alpha \cdot x + 1, \quad \alpha \geq 1$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f .

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε το ελάχιστο της f να είναι ελάχιστο.

2.100 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2.101 Σε ένα τμήμα δόθηκε το εξής πρόβλημα:

«Αν η μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.»

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής:

«Είναι $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$. Επειδή το $f(x_0)$ είναι το-

πικό μέγιστο, η f είναι αύξουσα αριστερά του x_0 και φθίνουσα δεξιά του x_0 .

Επομένως είναι $f'(x) \geq 0$ αριστερά (και κοντά) στο x_0 και $f'(x) \leq 0$ δεξιά (και κοντά) στο x_0 .

Άρα $g'(x) \leq 0$ σε κάποιο διάστημα (α, x_0) και $g'(x) \geq 0$ σε κάποιο διάστημα (x_0, β) .

Επομένως η g αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0 , στο οποίο είναι και συνεχής, οπότε το $g(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.»

Ωστόσο ο καθηγητής διέγραψε την απάντηση. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

2.102 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, & \text{αν } -5 \leq x \leq -2 \\ x^2 - 6, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ x^2 - 6x + 14, & \text{αν } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

γ) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

2.103 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και $g(x)f'(x) + f(x) = 2$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2.104 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$.

α) Αν η f έχει μέγιστη τιμή την $f(\alpha)$, να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) \leq 0$.

β) Αν η f έχει ελάχιστη τιμή την $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(\beta) \leq 0$.

γ) Αν $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μέγιστή της τιμή σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[a, \beta]$, στο οποίο επιπλέον είναι $f'(x_0) = 0$.

Η κατανόηση της θεωρίας

2.105 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο; (Εξετάσεις 2012)

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

γ) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ;

δ) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

ε) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , με εξαίρεση ίσως το $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο είναι συνεχής, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τι συμπεραίνετε για το $f(x_0)$;

στ) Πώς βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$;

2.106 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει τέτοιο, ώστε για κάθε Το x_0 λέγεται ή σημείο , ενώ το $f(x_0)$ λέγεται της f . Αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ή απλά το

β) Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f , αν υπάρχουν, λέγονται ενώ το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται

γ) Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα Δ , x_0 είναι ένα σημείο του Δ , η f παρουσιάζει στο x_0 και είναι στο σημείο αυτό, τότε

Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η f' έχει διαφορετικό πρόσημο στα διαστήματα (α, x_0) , (x_0, β) , τότε το είναι της f αλλά και της f στο (α, β) .

2.107 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε:

$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

β) Αν το $f(x_1)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(x_2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f , τότε $f(x_1) > f(x_2)$.

γ) Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

δ) Αν το x_0 είναι κρίσιμο σημείο μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα Δ , τότε $f'(x_0) = 0$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , τότε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα αυτό είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο διάστημα (α, β) .

στ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η f' δεν αλλάζει πρόσημο στα διαστήματα (α, x_0) , (x_0, β) , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β) .

ζ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα της f στο Δ είναι το μέγιστο και το μικρότερο από αυτά είναι το ελάχιστο της f στο διάστημα Δ .

η) Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f στο (α, β) και η f παραγωγίζεται στο (α, β) , τότε υπάρχουν υποδιαστήματα (γ, x_0) , (x_0, δ) του (α, β) στα οποία η f' έχει διαφορετικό πρόσημο.

θ) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο

οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$. (Θέμα εξετάσεων)

ι) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

(Θέμα εξετάσεων)

ια) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της εί-

ναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ . (Εξετάσεις 2005)

2.108 Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

(Εξετάσεις 2011)

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ2.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - 1)\ln x + 2$$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

Θ2.2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{x}{\alpha} + 1 \text{ με } \alpha > 0$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - 1$.
- ε) Αν $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \frac{\beta x}{\alpha} - \beta$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε την τιμή του β .

Θ2.3 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \ln x - \frac{x^2 + 1}{2} + 1$$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x \ln x + 1 = \frac{x^2 + 1}{2}$$

- γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

Θ2.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - 1)\ln x - 1, \quad x > 0$$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^{x-1} = e^{2013}, \quad x > 0$$
έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
- γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

(Εξετάσεις 2012)

Θ2.5 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{-v}e^x, \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^*$$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:
$$e^x \geq \left(\frac{ex}{v}\right)^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

γ) Αν $a^x \geq \left(\frac{ax}{v}\right)^v$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Θ2.6 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = 2, f'(0) = 0 \text{ και}$$

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Αν $g(x) = f(x) + f'(x)$, να αποδείξετε ότι:

$$g(x) = 2e^x, x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

δ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , ώστε να ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 6$.

Θ2.7 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 1), x > -1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$1 + \ln(x + 1) \leq e^x \text{ για κάθε } x > -1$$

δ) Αν είναι:

$$\alpha^x \geq 1 + \ln(x + 1) \text{ για κάθε } x > -1$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Θ2.8 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(e^x - x) = \sin x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Εξετάσεις 2011)

Θ2.9 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - \frac{a}{x} + a \text{ με } x > 0$$

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $a = -1$,

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα,

γ) να λύσετε την εξίσωση:

$$x \ln x + 1 = x \text{ με } x > 0$$

δ) να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(2x^2 + 2) - \frac{1}{x^2 + 3} > \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{2x^2 + 2}$$

Θ2.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \lambda - \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln x \leq \frac{x}{e} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x = x - \lambda$.

Θ2.11 Για μια πολωνυμική συνάρτηση $f(x)$ ισχύει ότι:

$$f(x) = f'(x) + f''(x) + x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 18$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = 2016$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(10x + 18) = x$.

Θ2.12 Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 0$$

ισχύει ότι:

$$f'(x) + xf''(x) \ln x + \frac{1}{x} = xf'(x) + x^2 f''(x)$$

για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f'(x)(\ln x - x) = \frac{1}{x} - 1, x > 0,$$

$$\beta) f(x) = \ln(x - \ln x), x > 0,$$

γ) η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.