

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Προβλήματα από τη γεωμετρία

3.4 Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

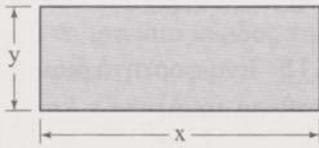
α) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = -x^2 + 200x$$

β) να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν γίνεται μέγιστο,

γ) να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

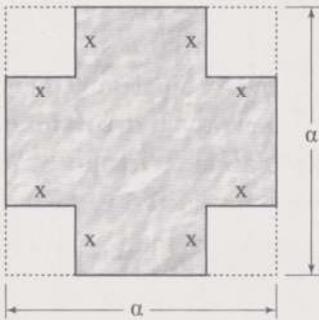
3.5 Το ορθογώνιο του σχήματος έχει διαστάσεις x , y και περίμετρο ίση με 100. Να βρείτε τις



διαστάσεις του ορθογωνίου, ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο. Τι συμπεραίνετε;

3.6 Ένας χωρικός διαθέτει συρματόπλεγμα μήκους 100 m και θέλει να το χρησιμοποιήσει για να κλείσει έναν βοσκότοπο σχήματος ορθογώνιου από τις τρεις πλευρές. Η τέταρτη πλευρά έχει έναν σταθερό φράχτη. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να περιφράξει ο χωρικός.

3.7 Από τις τέσσερις γωνίες ενός φύλλου χαρτιού σχήματος τετραγώνου με πλευρά $a = 6$ dm πρόκειται να αποκοπούν τέσσερα ίσα τετράγωνα. Ποια πρέπει



να είναι η πλευρά των τετραγώνων αυτών, ώστε το κουτί που θα προκύψει με αναδίπλωση να έχει τον μέγιστο όγκο;

3.8 Ένας κατασκευαστής θέλει να σχεδιάσει ένα ορθογώνιο κουτί ανοικτό στο πάνω μέρος και με συνολική επιφάνεια 108 cm^2 . Η βάση του κουτιού έχει σχήμα τετραγώνου.

α) Να εκφράσετε τον όγκο του κουτιού ως συνάρτηση του μήκους της πλευράς της βάσης του κουτιού.

β) Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε αυτό να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα;

γ) Ποια θα είναι η μέγιστη χωρητικότητα του κουτιού;

3.9 Μια οικοδομή με όγκο 1500 m^3 έχει δάπεδο και οροφή σχήματος τετραγώνου. Η απώλεια θερμότητας ανά m^2 από την οροφή είναι τριπλάσια από αυτή των τοίχων. Αν από το δάπεδο δεν υπάρχει απώλεια θερμότητας, τότε:

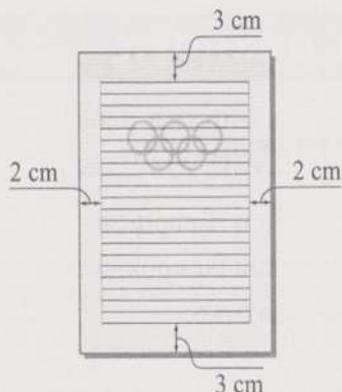
α) να εκφράσετε το ύψος της οικοδομής ως συνάρτηση της πλευράς της βάσης της,

β) να εκφράσετε τη συνολική απώλεια θερμότητας της οικοδομής ως συνάρτηση της πλευράς του δαπέδου της,

γ) να βρείτε πώς πρέπει να έχει σχεδιάσει ο μηχανικός την οικοδομή, ώστε η απώλεια θερμότητας να είναι η ελάχιστη.

3.10 Από ένα κομμάτι λαμαρίνας εμβαδού 12 m^2 θέλουμε να κατασκευάσουμε μια δεξαμενή σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, ανοικτή από πάνω και με τετράγωνη βάση. Να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, ώστε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.

3.11 Κάθε σελίδα ενός βιβλίου για τους Ολυμπιακούς αγώνες του 2004 έχει εμβαδόν 384 cm^2 .



Τα περιθώρια του κειμένου πάνω και κάτω είναι 3 cm, ενώ δεξιά και αριστερά 2 cm.

Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει η σελίδα, ώστε για τη γραφή του κειμένου να προσφέρεται ο μέγιστος δυνατός χώρος;

2. Προβλήματα οικονομικών

3.12 Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 20 \left(2000 - \frac{250}{t} - t^2 \right)$$

όπου t είναι ο χρόνος σε ώρες που χρειάζεται για την κατασκευή του.

- α) Πόσος χρόνος απαιτείται για την κατασκευή ενός αυτοκινήτου, ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;
- β) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος από την πώληση του αυτοκινήτου;

3.13 Το κόστος κατασκευής ενός αεροπλάνου και η τιμή πώλησής του δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K(t) = 30t^2 \text{ και } E(t) = 30 \left(100 - \frac{250}{t} \right)$$

σε χιλιάδες ευρώ, όπου t ο χρόνος (σε μήνες) που απαιτείται για την κατασκευή του.

- α) Να βρείτε το κέρδος από την πώληση ενός αεροπλάνου ως συνάρτηση του χρόνου t .
- β) Πόσοι μήνες απαιτούνται για την κατασκευή ενός αεροπλάνου έτσι, ώστε το κέρδος από την πώλησή του να είναι μέγιστο;
- γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος.

3.14 Σε ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζονται, μεταξύ άλλων, ταψάκια με γαλακτομπούρεκο. Το συνολικό κόστος παραγωγής x ταψιών με γαλακτομπούρεκο την εβδομάδα ανέρχεται περίπου στα $\left(\frac{x^2}{4} + 25x + 25 \right)$ λεπτά (cents) και η τιμή πώλησης στα $\left(1000 - \frac{x}{2} \right)$ λεπτά (cents) το ένα.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους $P(x)$ είναι:

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 975x - 25, \quad 0 \leq x \leq 2000$$

β) Πόσα ταψάκια με γλυκό την εβδομάδα πρέπει να παράγει το εργοστάσιο, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

3.15 Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 2 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό:

$$\left(2 + \frac{x^2}{400} \right) \frac{L}{h}$$

Αν τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού ανέρχονται σε 28 € την ώρα, τότε:

- α) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής ως συνάρτηση της ταχύτητας x ,
- β) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,
- γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

3.16 Για να πραγματοποιηθεί μια αεροπορική πτήση απαιτείται η συμμετοχή 100 τουλάχιστον ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 100 άτομα, το εισιτήριο ανέρχεται σε 1000 € το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο του εισιτηρίου μειώνεται κατά 5 €. Αν επιπλέον των 100 ατόμων δηλώσουν συμμετοχή x άτομα, τότε:

- α) να βρείτε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση του x ,
- β) να εκφράσετε τα έσοδα από την πτήση ως συνάρτηση του x ,

γ) να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλονται τα έσοδα, αν κάποια στιγμή έχουν δηλώσει συμμετοχή 120 άτομα,

δ) να βρείτε το πλήθος των ατόμων που θα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε η εταιρεία να έχει τα μέγιστα έσοδα.

3.17 Μια μικρή αναπτυσσόμενη χώρα της κεντρικής Αμερικής εξάγει μόνο καφέ. Οι αναπτυσσόμενες χώρες, για να αποφύγουν την υπερπαραγωγή καφέ, επέβαλαν στη χώρα αυτή τον εξής τρόπο διαμόρφωσης της τιμής: Για x τόνους καφέ που θα εξάγονται μηνιαίως, η τιμή θα είναι $\left(300 - \frac{x}{100}\right)$ δολάρια ανά τόνο. Αν το κόστος εξαγωγής είναι 10 δολάρια ανά τόνο, συν 1000 δολάρια που πληρώνονται εφάπαξ για ασφαλιστικούς λόγους, να βρείτε:

α) τη συνάρτηση που δίνει το μηνιαίο κέρδος της χώρας από την πώληση του καφέ,

β) την ποσότητα που πρέπει να εξάγει η χώρα αυτή μηνιαία έτσι, ώστε να έχει το μέγιστο εισόδημα,

γ) το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα που μπορεί να έχει η χώρα από την πώληση του καφέ.

3.18 Μια αεροπορική εταιρεία εκτιμά ότι αν το εισιτήριο προς μια πόλη είναι 300 €, τότε θα μεταφέρει 5000 επιβάτες τον χρόνο. Αν για κάθε αύξηση 100 €, πέρα από τα 300 €, χάνει 1000 πελάτες τον χρόνο, τότε:

α) να εκφράσετε τα έσοδα της εταιρείας ως συνάρτηση της διαφοράς x του εισιτηρίου από τα 300 €,

β) να βρείτε ποια πρέπει να είναι η τιμή του εισιτηρίου έτσι, ώστε η εταιρεία να επιτύχει μεγιστοποίηση των εσόδων της,

γ) να βρείτε ποια είναι τα μέγιστα έσοδα της εταιρείας.

3.19 Ένα μεγάλο τυπογραφείο έχει αναλάβει να εκτυπώσει 100 χιλιάδες πανομοιότυπες αφίσες. Για τον σκοπό αυτό ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 100 €. Επιπλέον το τυπογραφείο για κάθε ώρα εκτύπωσης έχει πρόσθετα έξοδα 10 €.

α) Να εκφράσετε τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν.

β) Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος.

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο αυτό δυνατό κόστος;

3.20 Μια βιοτεχνία θέλει να ετοιμάσει μια παραγγελία από 500 πουκάμισα σε μία ημέρα. Για τον λόγο αυτόν θα προσλάβει εργάτριες, οι οποίες ράβουν 5 πουκάμισα την ώρα και θα αμείβονται με 10 € την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των εργατριών ο βιοτέχνης θα προσλάβει και έναν επιστάτη, τον οποίο θα πληρώνει 20 € την ώρα. Ο εργοδότης θα πληρώσει επιπλέον στο ΙΚΑ 20 € την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένου και του επιστάτη.

α) Να εκφράσετε το κόστος της εκτέλεσης της παραγγελίας ως συνάρτηση του αριθμού των εργατριών που θα προσληφθούν.

β) Πόσες εργάτριες πρέπει να προσλάβει ο εργοδότης, ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο αυτό κόστος;

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι εργάτριες, πέραν του οκταώρου, ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

3. Προβλήματα στο καρτεσιανό επίπεδο

3.21 Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε με εξίσωση $y = 2x - 5$, το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

3.22 Να βρείτε σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 3$ τέτοιο, ώστε η απόσταση OM να είναι ελάχιστη.

3.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$$

Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;

3.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$$

Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι η μέγιστη δυνατή.

3.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, ένα σημείο της γραφικής παράστασής της $M(x, \sqrt{x})$ με $x > 0$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση AM .

β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε η απόσταση AM να είναι ελάχιστη.

γ) Για την παραπάνω τιμή του x να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M ,

ii) τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M με την ευθεία AM .

3.26 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

και το μεταβλητό σημείο $M(a, f(a))$ της C_f . Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο M τέμνει τους άξονες Ox , Oy στα σημεία A , B αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων A , B ως συνάρτηση του a .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAM , όπου O είναι η αρχή των αξόνων, είναι σταθερό.

γ) Έστω Γ , Δ οι προβολές του σημείου M στους άξονες Ox , Oy αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογώνιου $O\Gamma M\Delta$ να είναι ελάχιστη.

(Εξετάσεις 2005)

3.27 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$ και το σημείο $A(4, 2)$.

α) Να βρείτε σημείο M της παραβολής, ώστε η απόσταση AM να είναι ελάχιστη.

β) Να αποδείξετε ότι η AM είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M .

4. Προβλήματα από διάφορους τομείς

3.28 Πρόκειται να κατασκευαστεί μια μεταλλική δεξαμενή σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, του οποίου η βάση είναι τετράγωνο. Η δεξαμενή πρέπει να έχει όγκο 400 m^3 . Αν το υλικό κατασκευής των τετράγωνων εδρών κοστίζει 20 € το m^2 , ενώ των ορθογώνιων εδρών 50 € το m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο.

3.29 Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές στην Αλάσκα. Σε κάθε εκδρομή συμμετέχουν το πολύ 50 άτομα. Όταν ο αριθμός των εκδρομέων είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ορίζει τα έξοδα σε 5000 € ανά άτομο. Για να προσελκύσει περισσότερα άτομα η εταιρεία κάνει την εξής προ-

σφορά: «Κάθε επιπλέον άτομο που συμμετέχει στην εκδρομή θα μειώνει κατά 100 € το κόστος της εκδρομής ανά άτομο». Να βρείτε τον αριθμό επιπλέον των 30 ατόμων που πρέπει να συμμετέχουν σε κάθε εκδρομή, ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της. Πόσα είναι τα μέγιστα έσοδα;

3.30 Για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα, μια εταιρεία έχει κόστος:

$$K(x) = (500x + 50.000) \text{ €}$$

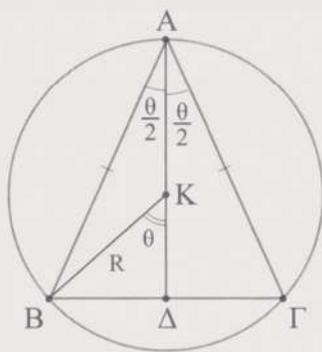
Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει η εταιρεία στην τιμή:

$$T(x) = (2000 - 2x) \text{ € ανά μονάδα}$$

α) Ποια συνάρτηση $P(x)$ δίνει τα κέρδη της εταιρείας;

- β) Για ποιο επίπεδο παραγωγής η εταιρεία έχει το μέγιστο κέρδος;
- γ) Ποια είναι η τιμή πώλησης όταν η εταιρεία έχει το μέγιστο κέρδος;
- δ) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος της εταιρείας;
- ε) Αν επιβληθεί επιπλέον φόρος 200 € ανά μονάδα προϊόντος, ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης, ώστε η εταιρεία να έχει το μέγιστο κέρδος;
- στ) Αν ο φόρος αυξηθεί και η εταιρεία θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, πρέπει ή όχι να αυξήσει την παραγωγή της;

3.31 Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο με κέντρο K και ακτίνα R . Η κορυφή A είναι σταθερή, ενώ οι πλευρές AB και $A\Gamma$ μεταβάλλονται.



Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν οι ίσες πλευρές του τριγώνου.

- α) Να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Delta$, $B\Gamma$, $K\Delta$ και $A\Delta$ ως συνάρτηση της γωνίας θ .
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\theta) = R^2 \eta \mu \theta \cdot (1 + \sigma \nu \theta), \quad 0 < \theta < \pi$$

- γ) Να βρείτε την E' και να λύσετε την εξίσωση:

$$E'(\theta) = 0$$

- δ) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης E .
- ε) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν αυτό έχει το μέγιστο εμβαδόν;

3.32 Μια εταιρεία μηχανών εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει 2000 μηχανές τον χρόνο, αν η τιμή πώλησης της κάθε μηχανής είναι 5000 €. Έχει επίσης υπολογίσει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 500 € τη μία, οι πωλήσεις αυξάνονται κατά 1000 μηχανές τον χρόνο. Η αύξηση των πωλήσεων λόγω μείωσης της τιμής είναι ανάλογη της μείωσης αυτής. Να βρείτε:

- α) τη συνάρτηση που δίνει την τιμή της κάθε μηχανής, ως συνάρτηση του αριθμού των επιπλέον των 2000 μηχανών που πωλούνται,
- β) πόσες μηχανές πρέπει να πουλήσει η εταιρεία, ώστε να έχει τα μέγιστα έσοδα,
- γ) ποια είναι τα μέγιστα αυτά έσοδα.

3.33 Η κάθετη διατομή ενός καναλιού είναι ισοσκελές τραπέζιο, του οποίου τρεις πλευρές έχουν μήκος $a = 2$ m. Να βρείτε τις γωνίες του τραπέζιου, ώστε το κανάλι να μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού.

3.34 Δίνεται ορθή γωνία \widehat{xOy} και τα σημεία A και B της πλευράς της Oy για τα οποία $AO = 4BO$. Να προσδιορίσετε σημείο M της πλευράς Ox τέτοιο, ώστε η γωνία \widehat{AMB} να είναι μέγιστη.

$$\left(\text{Δίνεται ότι } \epsilon \varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon \varphi \alpha - \epsilon \varphi \beta}{1 + \epsilon \varphi \alpha \epsilon \varphi \beta} \right)$$

3.35 Σε ένα ημικύκλιο να εγγράψετε ορθογώνιο, το οποίο να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

3.36 Να βρείτε το μεγαλύτερο μήκος που μπορεί να έχει μια σκάλα, ώστε να μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία που σχηματίζουν δύο κάθετα τεμνόμενοι διάδρομοι πλάτους ενός μέτρου ο καθένας.