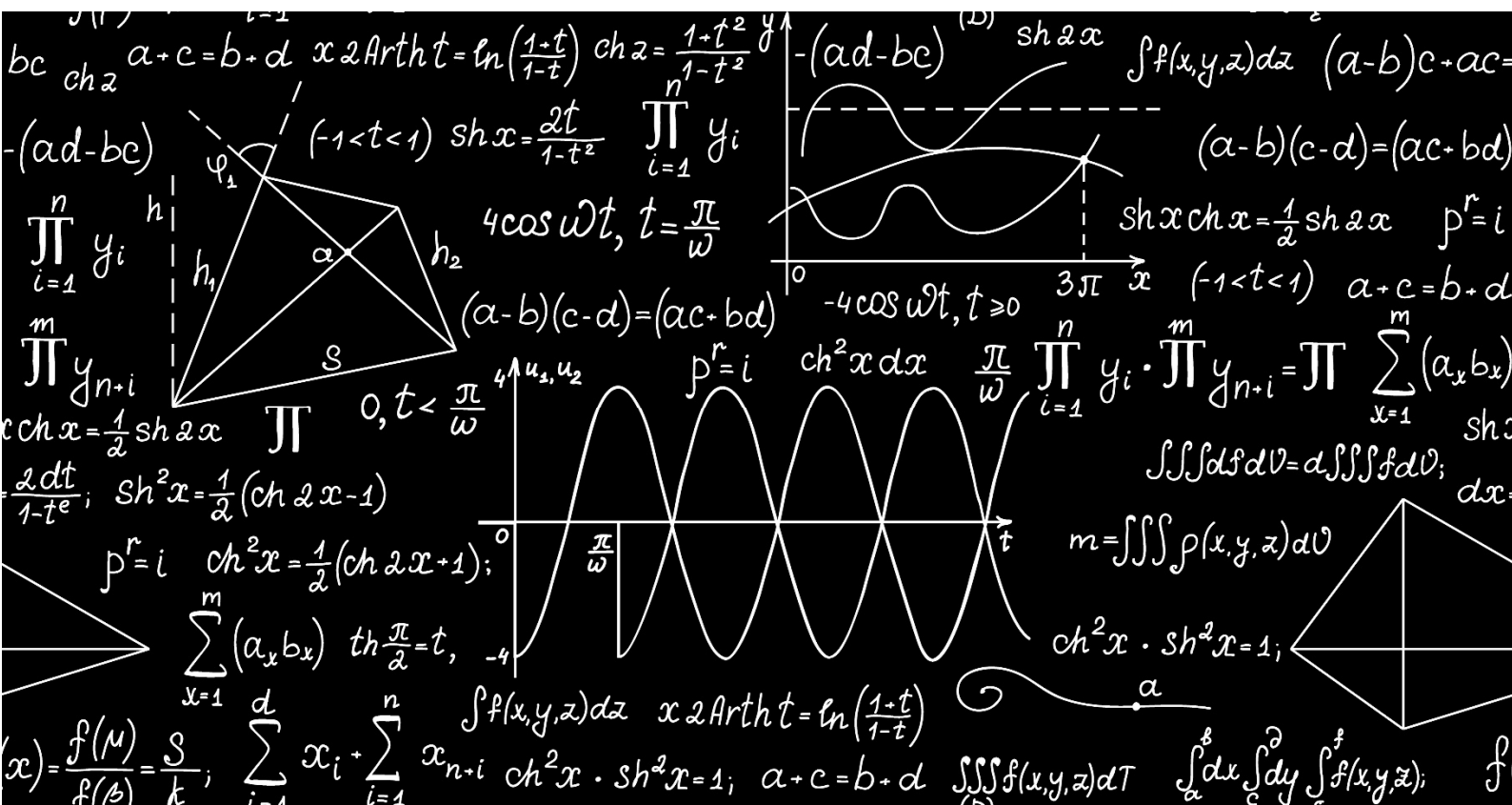




## Προτεινόμενες ασκήσεις

### 1. Μελέτη συνάρτησης - Πίνακας μεταβολών - Γραφική παράσταση

**7.7** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$ .  
 β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

**7.8** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{9}{x+1}$$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$ .  
 β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.9** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

- α) Να βρείτε την  $f'(x)$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ) Να βρείτε την  $f''(x)$ .

δ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

ε) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

στ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ζ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.10** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.

β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**7.11** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**7.12** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2e^x - 2 - 2x - x^2$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.13** Να μελετήσετε και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = (1 - x)e^x$

β)  $g(x) = 1 - x + \ln x$

## 2. Γραφική παράσταση - Πλήθος ριζών εξίσωσης

**7.14** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{x - 2}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^3 = \lambda(x - 2)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**7.15** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ε) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\lambda e^{-\frac{1}{x}} = x, \lambda \in \mathbb{R}$$

**7.16** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - 2 \ln x$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ε) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 - 1 - \lambda x = 2x \ln x$$

**7.17** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\eta \mu x}, \quad x \in A = (0, \pi)$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$1 - \lambda \eta \mu x + \sin x = 0, \quad x \in A$$

ε) Να χαράξετε τη  $C_f$ , αν  $A = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ .

**7.18** Να μελετήσετε και να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

β)  $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

γ)  $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

δ)  $\varphi(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3}$

**7.19** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax^4 + x^2 - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  διέρχεται από δύο σταθερά σημεία για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε το  $a$ , ώστε η ευθεία με εξίσωση:

$$y = 6x - 5$$

να εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ .

γ) Για  $a = 1$  να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.20** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax + \beta}{x^2}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $a$  και  $\beta$ , ώστε η  $C_f$  να έχει σημείο καμπής το σημείο  $M(3, -\frac{2}{9})$ .

β) Για τις παραπάνω τιμές των  $a$  και  $\beta$ :

i) να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$ ,

ii) να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

**7.21** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$$

α) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 - (a + 4)x + 5 + 2a = 0$$

για τις διάφορες τιμές του  $a$ .

**7.22** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 1}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ε) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**7.23** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) + x$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.24** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \ln x + (2 - x) \ln(2 - x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

δ) Να εξετάσετε αν η  $C_f$  έχει ασύμπτωτη.

ε) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.25** Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

β)  $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

**7.26** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta \mu x \cdot [1 - \ln(\eta \mu x)], \quad x \in (0, \pi)$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**7.27** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x - \eta \mu x$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\eta \mu x + \lambda = x$$

## Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

**Θ7.1** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$$

- α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .
- γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .
- ε) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**Θ7.2** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

- α) Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  
 $(x-1)e^x = x+1$
- γ) Έστω μια ευθεία  $\varepsilon$  η οποία εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(\alpha, f(\alpha))$  και της  $C_h$  στο σημείο  $B(\beta, h(\beta))$ , όπου  $h(x) = \ln x$ .

Να αποδείξετε ότι:

- i) το  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = g(x)$ ,
- ii) οι  $C_f, C_h$  έχουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτομένες.

**Θ7.3** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.
- β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .
- ε) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}}$$

**στ)** Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \quad x > 0$$

# 1ο κριτήριο αξιολόγησης

## Θέμα Α

- A1.** α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ ;  
β) Να διατυπώσετε τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής.  
γ) Πώς βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta = (a, b)$ ;
- A2.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ( $\Sigma$ ) ή λανθασμένη ( $\Lambda$ ).  
α) Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το σύνολο  $\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$ .  
β) Αν μια ευθεία της μορφής  $x = x_0$  τέμνει μια γραμμή  $C$  σε δύο τουλάχιστον σημεία, τότε η γραμμή αυτή είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.  
γ) Αν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ , τότε η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει ολικό ακρότατο στο  $A$ .  
δ) Αν  $f(x) = \ln|\varphi(x)|$ , τότε  $f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ , όπου  $\varphi(x)$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.  
ε) Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και μη σταθερή, τότε το  $f(A)$  είναι διάστημα.

**A4.** Να αποδείξετε ότι:

α)  $(x^v)' = vx^{v-1}$ ,  $v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

β)  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2(2\ln x - 3) + 4x - 1$ .

- B1.** Να βρείτε τις  $f'$  και  $f''$  και να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.  
**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .  
**B3.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ .  
**B4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (e - x)\ln(e + x) - (e + x)\ln(e - x)$ .

- Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .  
**Γ2.** Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της  $f$ .  
**Γ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .  
**Γ4.** Αν  $x \in (0, e)$ , να αποδείξετε ότι  $(e + x)^{e-x} > (e - x)^{e+x}$ .

## Θέμα Δ

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα  $3f(x) + f^3(x) = 3x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να βρείτε το  $f(0)$ .  
**Δ2.** Να εκφράσετε την  $f'(x)$  ως συνάρτηση του  $x$ .  
**Δ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.  
**Δ4.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .  
**Δ5.** Να αποδείξετε ότι  $xf'(x) < f(x) < x$  για κάθε  $x > 0$ .

## 2ο κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα Α

- A1. α)** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;
- β)** Πότε λέμε ότι το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ ;
- γ)** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;
- A2. α)** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;
- β)** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ ;
- γ)** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ ;
- δ)** Αν η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ , ποιες σχέσεις δίνουν τους αριθμούς  $\lambda$  και  $\beta$ ;
- A3.** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο  $x_0$  ενός διαστήματος  $\Delta$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .
- A4.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
- α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ , τότε η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .
- β)** Αν  $f''(x_0) = 0$ , τότε το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .
- γ)** Αν  $f''(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  ενός διαστήματος  $\Delta$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .
- δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα  $\Delta$ , τότε  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .
- ε)** Αν το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  έχει την απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  ή  $\frac{\infty}{\infty}$ , τότε:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
- στ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ , τότε είναι και  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ .
- ζ)** Αν η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , τότε:
- $$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$$
- η)** Μια συνάρτηση έχει το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες, μπορεί όμως να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- θ)** Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της  $C_f$  τις αναζητάμε στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης  $f$ , καθώς και στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της  $f$ .
- ι)** Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν μπορεί να έχει σημεία καμπής.

### Θέμα Β

Μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = f'(0) = 0$  και  $f''(0) = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

**B1.**  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$

**B2.**  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

**B3.**  $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f'(x) \ln(x+1)}$

### Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Γ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

**Γ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

**Γ4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Γ5.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$x^3 + (1 - \lambda)x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού, την παράγωγο της  $f$ , το πρόσημο της  $f'$  και τη μονοτονία της  $f$ .

**Δ2.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $g(x) = \ln x$ ,  $h(x) = e^x$  και τα σημεία  $A(a, \ln a)$ ,  $B(\beta, e^\beta)$  με  $a > 0$ . Αν οι εφαπτομένες των  $C_g$ ,  $C_h$  στα  $A$ ,  $B$  ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $a$  είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει από μία ακριβώς ρίζα στα διαστήματα  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  και ότι οι  $C_g$ ,  $C_h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.