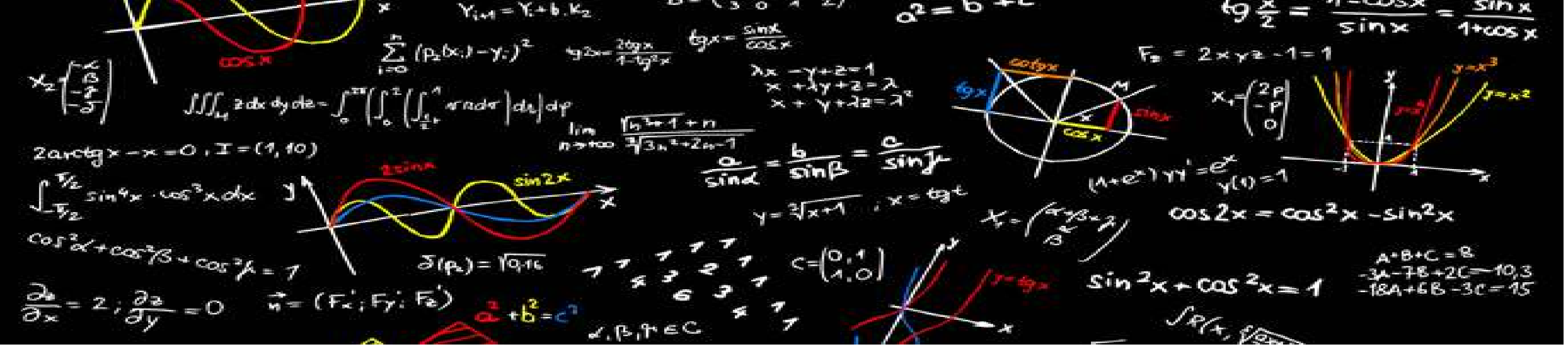

1ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

Α1. α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0;

β) Να διατυπώσετε τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής.

γ) Πώς βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f σε ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$;

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

Α3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Αν $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

β) Αν μια ευθεία της μορφής $x = x_0$ τέμνει μια γραμμή C σε δύο τουλάχιστον σημεία, τότε η γραμμή αυτή είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

γ) Αν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, τότε η συνάρτηση $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει ολικό ακρότατο στο Α.

δ) Αν $f(x) = \ln|\varphi(x)|$, τότε $f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, όπου $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

ε) Αν η συνάρτηση $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη σταθερή, τότε το $f(A)$ είναι διάστημα.

Α4. Να αποδείξετε ότι:

α) $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

β) $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(2\ln x - 3) + 4x - 1$.

Β1. Να βρείτε τις f' και f'' και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της f.

Β3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^2\ln x - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Β4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (e - x)\ln(e + x) - (e + x)\ln(e - x)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

Γ2. Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της f.

Γ4. Αν $x \in (0, e)$, να αποδείξετε ότι $(e + x)^{e - x} > (e - x)^{e + x}$.

Θέμα Δ

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $3f(x) + f^3(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε το $f(0)$.

Δ2. Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση του x.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) < f(x) < x$ για κάθε $x > 0$.

2ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

Α1. **α)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ;

β) Πότε λέμε ότι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f;

γ) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Α2. **α)** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

β) Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$;

γ) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$;

δ) Αν η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, ποιες σχέσεις δίνουν τους αριθμούς λ και β;

Α3. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) Αν $f''(x_0) = 0$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

γ) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

ε) Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

στ) Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, τότε είναι και $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

ζ) Αν η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \lambda x\right]$$

η) Μια συνάρτηση έχει το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες, μπορεί όμως να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

θ) Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f τις αναζητάμε στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f, καθώς και στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της f.

ι) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν μπορεί να έχει σημεία καμπής.

Θέμα Β

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$. Να βρείτε τα όρια:

Β1. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$ **Β2.** $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$ **Β3.** $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f'(x)\ln(x+1)}$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Γ5. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$x^3 + (1-\lambda)x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, την παράγωγο της f, το πρόσημο της f΄ και τη μονοτονία της f.

Δ2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$ και τα σημεία $A(\alpha, \ln\alpha)$, $B(\beta, e^\beta)$ με $\alpha > 0$. Αν οι εφαπτομένες των C_g, C_h στα Α, Β ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει από μία ακριβώς ρίζα στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ και ότι οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

1η επανάληψη

Α. Θέματα από τις συναρτήσεις και τα όρια

Ε1.1 Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$10^{f(x)} + \log f(x) = x + 10$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $10^x + \log x = 10$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Ε1.2 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

και

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Ε1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$x[f(x) + f(y)] = f(x)f(x + y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει $\alpha \neq 0$ με $f(\alpha) = 0$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

δ) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f με τη δοσμένη ιδιότητα.

Ε1.4 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(x - y)(f(x) - x) - (x - y)(f(y) - y) \geq$$
$$\geq (f(f(x)) - y)(f(f(y)) - x)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η f είναι "$1 - 1$" και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

γ) $(x - y)(f(x) - f(y)) \geq 0$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

δ) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ε) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε1.5 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$(f \circ g)(x) = x^2$ και $(g \circ f)(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ε1.6 Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(y)}{f(x)} + 1 \text{ για κάθε } x, y > 0$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ε1.7 Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων:

α) να βρείτε την τιμή $f(0)$,

β) να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

γ) να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, αν:

$$f(x) > 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

Ε1.8 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$

β) $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x + \eta\mu x| - |x - \eta\mu x|}{\sqrt{x + 1} - 1}$

Ε1.9 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(2 - x)}{f(x)} = \alpha, \ \alpha > 0$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό α.

Ε1.10 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ell, \ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = m \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 2f(-x)}{x} = 4, \text{ όπου } \ell, m \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(2x)}{8x^2+f^2(x)}$

Ε1.11 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+5}$

β) $B = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+2}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(2^{\sqrt{x^2+2x+2}}-2^{\sqrt{x^2+3x+5}}\right)$

Ε1.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}+\alpha x+\beta$$

α) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 10$$

Ε1.13 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha > 0$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\alpha^x+2^{x+1}}{\alpha^{x+1}+2^x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\alpha^x+e)$

Ε1.14 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xy)+f(x)+f(y)+3=x+y+xy$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\,\sigma\upsilon\nu 2x}{f^2(x)+1}$.

Β. Θέματα από τη συνέχεια και τα θεωρήματα

Ε1.15 Δίνεται μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f(2) < 0 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$$

Επίσης ορίζουμε τη συνάρτηση g με:

$$g(x) = f(2+\ln x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = \ln x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, e)$.

Ε1.16 Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ με $f(0)=7$ και $f(4)=1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Αν $\alpha \in [1, 7]$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$$

Ε1.17 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f^3(x)+f(x)=2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ε) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

στ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = x-1$$

ζ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ε1.18 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$2f(x) - \eta\mu f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f αντιστρέφεται,

ii) η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

iii) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

E1.19 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x) + yf(y) \geq 2yf(x) \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{2x-\alpha}{x}f(\alpha) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha - x}\alpha f(\alpha)$

κοντά στο α,

β) η f είναι συνεχής.

E1.20 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 4]$ με την ιδιότητα $f(0)f(4) < 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$h(x) = x^2 - 2x, \; x \in (0, 2)$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$-1 \leq f(\gamma^2) + f(2\gamma) < 0$$

E1.21 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

με $\alpha > 0$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης:

$$g(x) = \alpha f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right) - \beta f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + x\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με:

$$x_1 + x_2 = \alpha + \beta \text{ και } \alpha f(x_1) = \beta f(x_2)$$

E1.22 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

με θετικές τιμές. Αν ισχύουν:

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \text{ και } f^3(4) = f(1)f(2)f(3)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) \leq f(4) \leq f(3)$,

β) υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(4)$,

γ) η f δεν αντιστρέφεται.

Γ. Θέματα από την εύρεση συνάρτησης

E1.23 Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0)g(0) = f(0)g'(0)$ και:

$$f''(x)g(x) = f(x)g''(x), \; g(x) \neq 0$$
$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) αν $f(1) = 2g(1)$, τότε:

$$f(x) = 2g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

E1.24 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(1) = 1$.

γ) Αν η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = f(x) - x, \; x \in \mathbb{R}$$

ii) να αποδείξετε ότι:

$$(xe^{-x})' = e^{-x}(1 - x)$$

iii) να βρείτε τη συνάρτηση f.

E1.25 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) + 2xe^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

β) $f'(x) = e^{2x}f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

E1.26 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = f(x) + g(x), \; g'(x) = g(x) - f(x)$$
$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$f(0) = 0 \text{ και } g(0) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) + g^2(x) = e^{2x}$$

β) Να βρείτε το όριο $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

E1.27 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(1) = 1$ και

$f'(x) = -f^2(x)$ για κάθε $x > 0$

β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και
$f'(x)f^2(x) = e^{3x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(1) = 1$ και
$x(f'(x))^3 = f(x)$ για κάθε $x > 0$

Ε1.28 Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ισχύει ότι $f'(1-x)f(x) = \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}^*$ είναι μια σταθερά.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x)f(1-x)$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Αν ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, να βρείτε τη συνάρτηση f.

Ε1.29 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

με:

$$f'(x) + e^{g(x)} = g'(x) + e^{f(x)} = 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\text{και } f(1) = g(1) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g παραγωγίζονται και δεύτερη φορά.

β) Να αποδείξετε ότι $f = g$.

γ) Να βρείτε τον τύπο των f και g.

Ε1.30 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (f'(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 + f(x)\eta\mu x + f'(x)\sigma\upsilon\nu x$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) οι συναρτήσεις:

$$g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x$$

$$\text{και}$$

$$h(x) = f(x)\eta\mu x + f'(x)\sigma\upsilon\nu x$$

είναι σταθερές στο $\mathbb{R}$.

ii) υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x) = \lambda\eta\mu x + \mu\sigma\upsilon\nu x$$

ε) Αν $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln\left(f^2(x) + (f'(x))^2\right)$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) + (f'(x))^2 = 1, \ x \in \mathbb{R}$$

iii) να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Ε1.31 Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη σταθερές και παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις ιδιότητες:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$\text{και}$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν $f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) = -g'(0)g(x)$ και
$g'(x) = g'(0)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

β) $f^2(x+y) + g^2(x+y) =$
$= \left(f^2(x) + g^2(x)\right)\left(f^2(y) + g^2(y)\right)$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

γ) $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $f^2(2x) + g^2(2x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) αν $g'(0) = 1$, τότε η συνάρτηση:

$$h(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x + g(x)\eta\mu x$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

στ) $f(0) = 1$ και επιπλέον:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ και } g(x) = \eta\mu x$$

Ε1.32 Μια συνεχής συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

έχει την ιδιότητα:

$$f(x)-f(y)=\frac{y-x}{2}\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}\right]$$

για κάθε $x, y>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=-\frac{f(x)}{x}>0$$

β) $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$,

γ) η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Ε1.33 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ και } g\colon (0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

με $f(1)=1$ και:

$$f\big(g(x)\big)=f'\big(g(x)\big)=x \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\ln x+c$, όπου c σταθερά.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g.

γ) Να αποδείξετε ότι $f=g^{-1}$.

Δ. Θέματα από τη μελέτη συνάρτησης

Ε1.34 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

(Θέμα εξετάσεων)

Ε1.35 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x-2$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x)=0$$

Ε1.36 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1),\ x>-1$$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f και την f΄.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Ε1.37 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\frac{x}{x-1}-\frac{\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{2\ln x}{(x-1)^3}$.

γ). Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Ε1.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^x-2xe^{-x}-e^{-x}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε1.39 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x-1}-1-\ln x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1}\geq 1+\ln x,\ x>0$.

Ε1.40 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=6x^2(x+3)\ln x-(5x+27)x^2+17$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β) Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

ε) Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Ε1.41 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)^4$$

με $\alpha<\beta<\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x-\alpha}+\frac{3}{x-\beta}+\frac{4}{x-\gamma}$

β) η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ είναι κοίλη στα διαστήματα (α,β) και (β,γ).

Ε1.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^4+2\beta x^3+6(\beta^2+\beta)x^2+2\alpha x+1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $M(0, 1)$ και η C_f δέχεται στο σημείο $N(1, f(1))$ οριζόντια εφαπτομένη.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Ε1.43 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1},\ x \neq -1 \text{ και}$$

$$g(x) = \frac{\eta\mu x - 1}{1 + \sigma\upsilon\nu x},\ x \in (-\pi, \pi)$$

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή, καθώς και τα σημεία καμπής της C_f.

γ) Να αποδείξετε ότι η g είναι κοίλη στο διάστημα:

$$(-\pi, \pi)$$

Ε1.44 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

στ) Να βρείτε τις τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Ε1.45 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-2)e^{-x} + 2x^2 - 3x + 2$$

α) Να βρείτε τις $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε1.46 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x - \frac{x^3}{6}$$

α) Να βρείτε τις παραγώγους f', f'', $f^{(3)}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} > x + \frac{x^3}{6} \text{ για κάθε } x > 0$$

Ε1.47 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 - x - 1$$

α) Να βρείτε την f' και την f''.

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(0, f(0))$.

γ) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x^2 = x + 1$.

στ) Να αποδείξετε ότι:

$$e^x - 1 \geq x(1-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ε1.48 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \to 0} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

δ) Να εξετάσετε αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Ε1.49 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + 2\sigma\upsilon\nu x + e^{-x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

Ε1.50 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) + x^2 + 2x + 2 = g'(x) + 2e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = g(0)$, να αποδείξετε ότι:

α) οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο,

β) οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

E1.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{2007} + 2007^x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^{2007} + 2007^x = 2008$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^{2007} + 2007^x > 1$$

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

στ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(2) + f(4) < f(3) + f(5)$$

E1.52 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} > \ln(\nu + 1)$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

E1.53 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \text{ και } g(x) = x - 1 - x\ln x$$

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της g.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν η f είναι "1 − 1".

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2+5)\ln(2x^2+2) = (2x^2+1)\ln(x^2+6)$$

E1.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2^x) + f(3^x) + f(4^x) = 0$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$f(3^x) + f(5^x) < f(4^x) + f(6^x)$$

για κάθε $x > 0$.

E1.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3(2\alpha+1)x^2 + 6\alpha(\alpha+1)x - 6\alpha^2 + 1$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του α.

E1.56 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x + e^{-x} \text{ και } g(x) = \ln(x+1) - x + 2$$

α) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ αν ισχύει:

$$\ln[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)] = \alpha + \beta + \gamma$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) = g(x) + g(2x) + g(3x)$$

δ) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, ώστε $f(\alpha) = g(\beta)$.

E1.57 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x, \quad x > 0$$

α) i) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to +\infty}\left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε:

$$(\alpha + 1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha + 1}$$

Ε1.58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$$

α) Να βρείτε τις f' και f''.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα. Πόσα σημεία καμπής έχει η C_f;

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Ε1.59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - \lambda x + 1, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία για τις διάφορες τιμές του λ.

β) Για ποιες τιμές του λ η f έχει ολικό ακρότατο και τι είδους;

γ) Για τις διάφορες τιμές του λ, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\ln x + 1 = \lambda x$$

Ε1.60 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, να βρείτε την παράγωγο της f και να αποδείξετε ότι και αυτή είναι συνεχής.

β) Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

$$g(x) = xe^x - e^x + 1 \ \text{ και}$$
$$h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

δ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ε) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$e^x = \lambda x + 1$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ε1.61 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

για κάθε $x > 0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x + 1}{x}\right)^x > \frac{x}{x + 1}e \ \text{ για κάθε } x > 0$$